GEOMETRÍA VECTORIAL

Ing. MSc. Fernando Valdés Macías. Profesor U.T.P.

Ing. MSc. Hernando Parra Lara. Profesor U.T.P.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

PRÓLOGO

Una de las características de un texto de geometría es su claridad y sencillez con el fin de que sea accesible al lector sin perder rigurosidad. El texto está dirigido a estudiantes de primer semestre que incursionan en el programa licenciatura en matemáticas. La geometría elemental ha sido prácticamente desterrada de la enseñanza media, y para ayudar a resolver tal carencia han aparecido de manera coincidente nuevas tecnología computacionales así como su empleo en Álgebra vectorial que ha resultado medio eficaz para recuperar la educación geométrica que tanto hace falta en el estudio del cálculo en la educación superior. Algunos textos de álgebra lineal exponen temas de aplicación geométrica pero no llegan a profundizar el desarrollo de la misma; deseamos por lo tanto llenar este vacío con el presente texto, en el cual se exponen temas de geometría sintética de una manera más específica.

Es una fortuna que todavía en algunas universidades del país se oriente el curso de geometría vectorial que tanto hace falta a nuestros licenciados en matemáticas.
El libro no tiene la intención de ser una introducción en el Álgebra Lineal pero sí deja unas ideas claves para su comprensión posterior, tal es el caso de la independencia lineal, que tampoco da énfasis en aplicaciones de la física cuyos temas son tratados en algunos cursos del respectivo programa. Se observa que los estudiantes del curso de Geometría Vectorial se enfocarán más en el tema de geometría clásica o sintética en el plano, sin embargo podrán incursionar, de manera elemental, en el espacio $\mathbb{R}^3$ utilizando coordenadas.

Este libro introduce el estudio de ciertos temas de la geometría sintética o pura utilizando las propiedades de los vectores; este estudio se denomina Geometría Vectorial, y se realiza considerando que cada figura geométrica tiene de manera intrínseca sus propiedades y que al adherir o superponer vectores que coinciden con los lados y formas de las figuras geométricas, se procede a extraer nuevas propiedades y demostraciones cuyos resultados se encuentran en los textos clásicos de geometría euclidiana. Cada figura es una síntesis de leyes que se descubren y se combinan para generar teoremas cuyas aplicaciones resultan interesantes para el entendimiento del espacio euclidiano[1]. El análisis vectorial nos permite transformar en vectores cada segmento de las figuras geométricas y así por este camino llegar al estudio más a fondo de algunos teoremas y problemas de la geometría euclidiana.

Se inicia el texto con el concepto básico de vector y sus diferentes notaciones, luego cómo se desarrollan las operaciones: suma y resta vectorial. Se dan a conocer las diferentes notaciones de los vectores.

La presentación de la forma simétrica de un vector para la solución de problemas se desarrolla de manera clara con ejemplos sencillos hasta llegar al teorema de Ceva, y el vector bisectriz en un triángulo cualquiera.

[1]El espacio euclidiano se define en los cinco axiomas básicos de la geometría euclidiana.

En la parte final del libro se realiza un rápido estudio de la geometría analítica aplicando análisis vectorial en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ y en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$. Para la geometría analítica emplearemos los vectores para presentar soluciones a problemas que de manera sintética pueden ser extremadamente difíciles.

Es importante hacer énfasis en el uso de algunos teoremas básicos[2] de geometría elemental para la soluciones o demostraciones de teoremas con la aproximación o enfoque vectorial.

El libro presenta varios temas de forma novedosa y original como por ejemplo: el vector bisector, los teoremas de Ceva, Menelao y Desargues; así como también la solución de varios ejemplos y teoremas, ver resultados como las ecuaciones 1.15 y 1.16.

[2]Los teoremas sobre semejanza poligonal son necesarios.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN A LOS VECTORES

1.1 MAGNITUDES

Desde el punto de vista físico existen magnitudes claramente distinguibles en su significado, la magnitud es la propiedad que tienen los cuerpos de ser medidos utilizando las cantidades. Hay magnitudes que se definen como escalares y otras que se denominan vectoriales.

Las magnitudes escalares simplemente se representan por números reales, a este número se le agrega una unidad que completa su significado; por ejemplo cuando hablamos de 100 metros, 30 litros. Existen otras magnitudes que, además de su valor como número real, tienen una dirección y un sentido, términos que se explicarán más adelante; éstas se denominan magnitudes vectoriales, tenemos el caso de la fuerza o la velocidad (la rapidez es un escalar y representa la magnitud de la velocidad).

Algunos de los conceptos ya conocidos y usados son: punto, recta y otros que en matemáticas no se definen, y con ellos realizamos axiomas para llegar a estructuras cuyas relaciones nos darán los teoremas como resultado.

Para representar los números reales se empleará el símbolo $\mathbb{R}$.

1.1.1 VECTORES

VECTORES LIBRES Y DE POSICIÓN

Si se toma un número real como magnitud[1] y lo dotamos de dirección, es decir un segmento orientado con un ángulo respecto a una referencia convenida o relativa a otro segmento, podemos modelar un nuevo ente que llamaremos vector. Veamos la figura 1.1 en donde ubicaremos un segmento que sale del punto A (origen o cola) hasta el punto B (final o cabeza), esta distancia nos definirá la magnitud o valor real del vector, también podemos decir que es su módulo, además le agregaremos la representación o gráfico, un sentido o extremo en forma de punta. Las cantidades escalares, que son números reales, sólo poseen magnitud, no tienen dirección.

1.1.1.1 NOTACIÓN

La figura 1.1 muestra un segmento dirigido que representa un vector. La simbología del vector será una letra o letras resaltadas o cualquier símbolo que se defina o se convenga, por ejemplo:

1. $\mathfrak{v}$, $\vec{\mathbf{A}}$, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{a}$, $\vec{\mathbb{A}}$

2. $\mathbf{a}$, $\bar{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathfrak{A}}$, $\hat{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{a}$, $\vec{A}$

Lo relevante en un trabajo vectorial es ser consistente con la notación y no mezclar las notaciones para un mismo vector en un desarrollo.

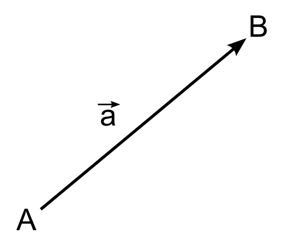


Figura 1.1 Representación vector

[1]El concepto de magnitud de vectores se definirá después.

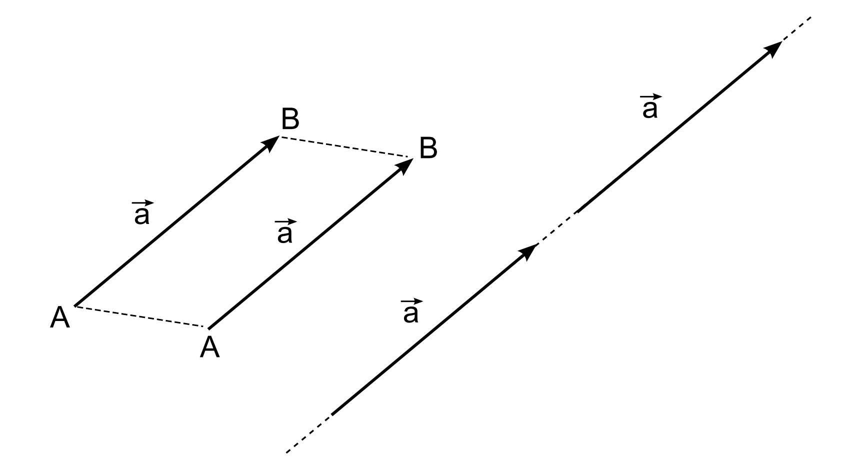


Figura 1.2 Vector libre y vector deslizante

El módulo de un vector se expresa, como en el caso de la figura 1.1, así: $\|\vec{a}\|$ o también como $|\vec{a}|$. La idea de vector libre aparece cuando definimos su punto inicialde [2] utilizando una coordenada fija para éste, es decir, podemos deslizarlo de forma paralela a él mismo manteniendo su magnitud. También se pueden deslizar sobre la línea que lo soporta y se puede decir que es un vector deslizante, este deslizamiento se conoce como traslación[3] de un vector. El vector libre no pose una posición absoluta en el plano o en el espacio, ver figura 1.2. Cabe recalcar que en física el punto de aplicación de un vector genera un amarre que le impide la libertad normalmente utilizada para su estudio abstracto; no es lo mismo dos vectores que hacen compresión o tensión, sus puntos de aplicación serán únicos. La dirección de un vector es la dirección de la recta que contiene el vector o de cualquier recta paralela a ella.

Existe un término vectorial llamado *vector de posición*, que son vectores no libres porque el punto inicial es un punto escogido y se le llama punto de origen del vector.

1.1.2 IGUALDAD DE VECTORES

Decimos que varios vectores son iguales si poseen la misma dirección y la misma magnitud. Veamos la figura 1.3 en donde los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ son iguales. Se expresan matemáticamente como $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$. Si algunos vectores tienen sus puntos de origen diferentes pero su magnitud y dirección entre ellos son iguales se dice que son ligados. Estos vectores tendrán efectos físicos diferentes por lo tanto no los podemos considerar como vectores iguales. Si determinamos un punto en el plano o en el espacio y decidimos reubicar los

[2]El punto inicial o de partida tiene más una connotación física.

[3]En geometría euclidiana, una traslación es el movimiento de todos los puntos de un objeto geométrico una distancia constante en una dirección especificada; también llamado movimiento rígido de un cuerpo sin rotación.

vectores desde este punto hasta un nuevo punto, entonces serán iguales si todos coinciden en magnitud y dirección al superponerlos en el nuevo punto.

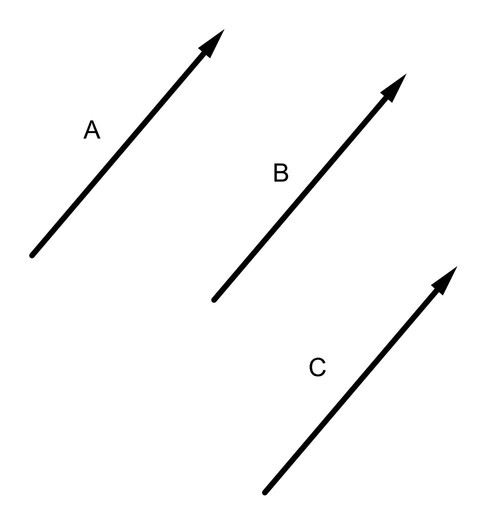


Figura 1.3 Igualdad de vectores

1.2 ÁLGEBRA DE VECTORES

Existen en el Álgebra vectorial básica las operaciones de suma y diferencia entre vectores así como la multiplicación de escalares por vectores, el producto escalar o producto punto y el producto vectorial se explicarán más adelante.

1.2.1 SUMA GEOMÉTRICA DE VECTORES

Si se tienen dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, con magnitud diferente de cero y en un plano, definimos geométricamente la suma del vector $\vec{a}$ con el vector $\vec{b}$ cuando colocamos en el final del vector $\vec{a}$ con el origen del vector $\vec{b}$, la resultante es un nuevo vector que parte del origen del vector $\vec{a}$ y termina en el final del vector $\vec{b}$, tal resultante la denotamos como $\vec{a} + \vec{b}$, este procedimiento se llama regla del triángulo, ver la figura 1.4; ahora si se forma un paralelogramo con los dos vectores y realizamos la operación suma tal como aparece en la figura 1.5 este proceso se denomina la regla del paralelogramo, de esta figura se observa que $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; siendo esta propiedad denominada conmutativa de la suma de vectores.

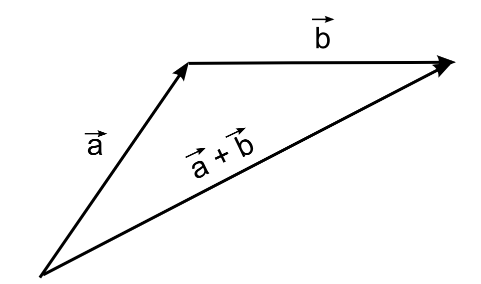


Figura 1.4 Regla del triángulo

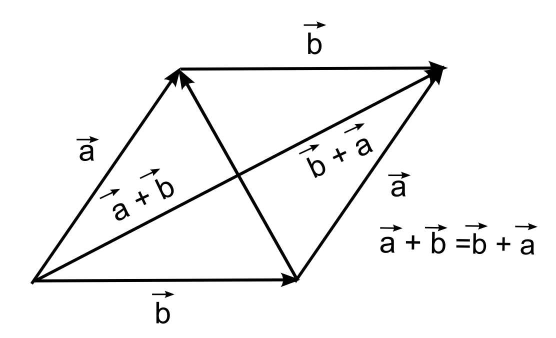


Figura 1.5 Regla del paralelogramo

Observemos, en la figura 1.5, que la diagonal del paralelogramo representa la suma de los vectores. Es frecuente escuchar la expresión coloquial "Unir cabeza con cola" en la suma de vectores.

1.2.2 ADHERENCIA VECTORIAL

Una de las características que emplearemos en el desarrollo de la Geometría vectorial es la de poder adherir un figura geométrica un grupo de vectores de tal manera que se pueda realizar un estudio de propiedades y llegar a demostraciones geométricas, por ejemplo en la figura 1.6a muestra un polígono sin adherencia vectorial, y deseamos estudiarlo no desde una visión geométrica sino vectorial, entonces llegamos a la figura (b). La gráfica de un pentágono de lados a, b, c, d, e si adherimos o asociamos a cada lado del polígono un vector cuya magnitud corresponde a la longitud de cada lado y cuya dirección se ajusta a forma de la figura (el sentido[4] se escoge libremente), entonces quedan claramente definidos los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, además asumen las propiedades de la figura tales como las relaciones angulares y de dirección con sus respectivas magnitudes.

[4] Es decir cómo colocamos la punta del vector.

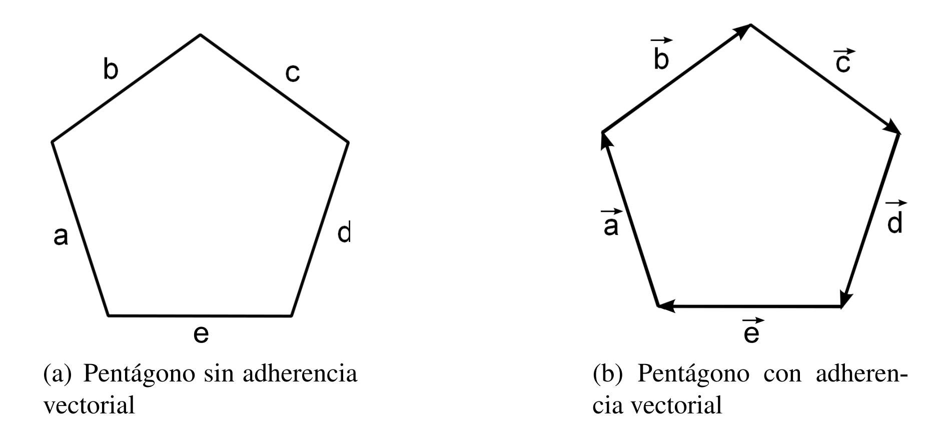


Figura 1.6 Representación vectorial de un polígono

NOTA: Los vectores que se colocan sobre los segmentos de una figura geométrica adquieren la magnitud del segmento y de inmediato adquieren la relación angular que posee la figura geométrica entre los segmentos, es decir entre los otros vectores del resto de los segmentos de la figura.

LEY ASOCIATIVA DE LA SUMA

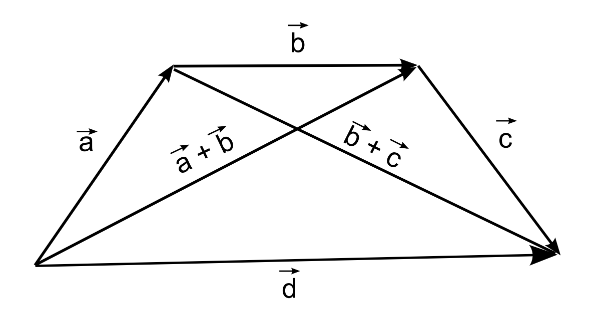


Figura 1.7 Ley asociativa

En la figura 1.7 se representa la ley asociativa que nos da la libertad para escoger una ruta y realizar la respectiva suma vectorial. Se tiene que $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

PROBLEMAS

Problema 1.2.1. *¿Cuántos vectores, realmente, ve el lector en la figura 1.5, ¿son* 2 *o* 4*?*

Problema 1.2.2. *Representar un heptágono de manera vectorial con sus respectivas diagonales ¿Qué relación tiene cada diagonal con los lados?*

Problema 1.2.3. *Dibuje un trapecio isósceles y sobre éste adhiera vectores sobre sus lados, escoja diferentes posibilidades.*

Problema 1.2.4. *Dado el octágono de la figura 1.8 hallar la suma vectorial igual a* $\overrightarrow{AE}$

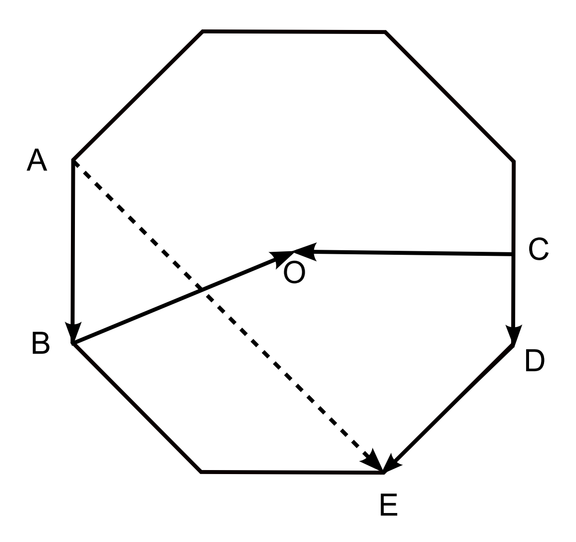


Figura 1.8 Octágono

1.2.3 ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

Si se tienen dos vectores cualesquiera, coplanarios[5], definimos ángulo entre vectores como el ángulo que se forma por la intersección de las líneas de soporte o de deslizamiento de los vectores, éstas líneas imaginarias son la prolongación en la misma dirección de cada vector; si el ángulo es igual a cero los vectores son paralelos en el mismo sentido o si el ángulo es igual a $180°$ son paralelos pero en sentido opuesto, ver figura 1.9.

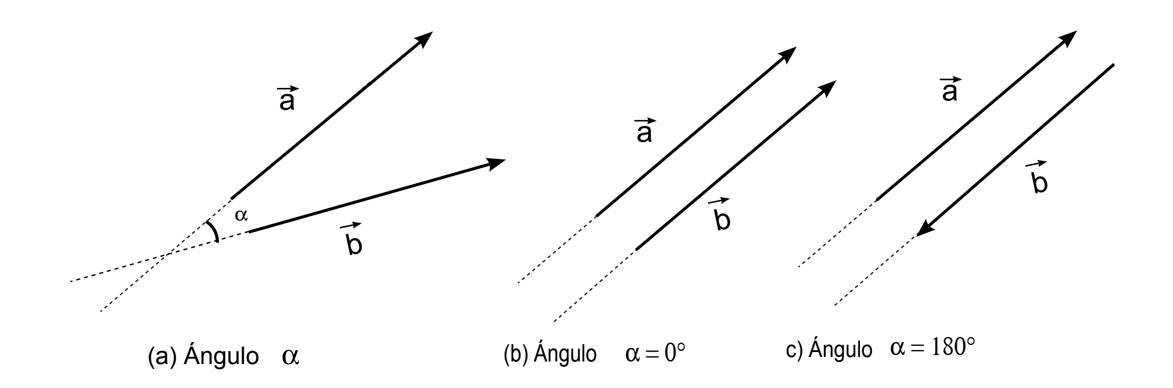


Figura 1.9 Ángulo entre dos vectores

[5]Se define coplanario si pertenecen al mismo plano o que son paralelos a un mismo plano, ver [9]

1.2.4 MAGNITUD DE LA SUMA DE DOS VECTORES

Para hallar la magnitud del vector suma de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ aplicaremos el teorema del coseno. En la figura 1.10 se representa la ley del paralelogramo y se forma el triángulo compuesto por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cuyas magnitudes son, respectivamente $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $|\vec{c}| = c$. Si aplicamos el teorema del coseno para determinar la magnitud del vector $\vec{c}$ tenemos:

$$|\vec{c}| = c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varphi)} \tag{1.1}$$

Donde $\alpha+\beta = \varphi$ de la figura 1.10 el ángulo entre los dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\alpha+\beta = \varphi$, por esta razón la ecuación 1.1 va con signo positivo, notemos que $\gamma = 180° - \varphi$, luego $\cos(180° - \varphi) = -\cos(\varphi)$.

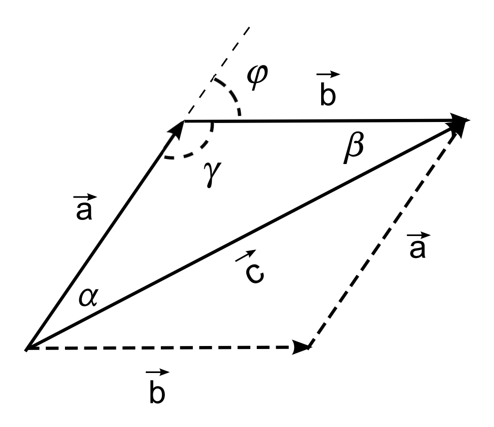


Figura 1.10 Suma de dos vectores

1.2.5 DIFERENCIA DE VECTORES

Si observamos la figura 1.11 vemos un triángulo que nos conduce a la siguiente relación: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{s}$, siendo $\vec{s}$ la suma de los dos vectores, entonces se puede escribir que $\vec{a} + \vec{b} - \vec{s} = \vec{0}$. Aparece en el término de la derecha de esta ecuación el vector que llamaremos el vector "Cero." El vector $-\vec{a}$ es vector $\vec{a}$ en sentido opuesto.

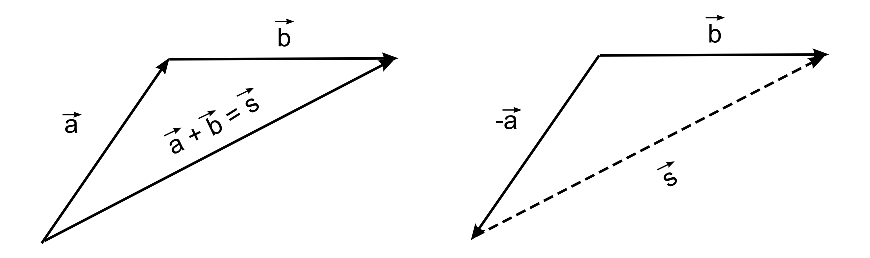


Figura 1.11 Vector diferencia

Aquí se enfatiza que la resta entre dos vectores se realiza gráficamente colocando el origen de un vector con el origen del otro; el final del vector resultante queda tocando el final o la punta del vector minuendo, ver figura 1.12. Tanto la suma de vectores como la diferencia generan vectores y esta propiedad se define como propiedad clausurativa de los vectores[6]. También de la figura 1.11, a la derecha, podemos ver que $\vec{s} - \vec{a} = \vec{b}$.

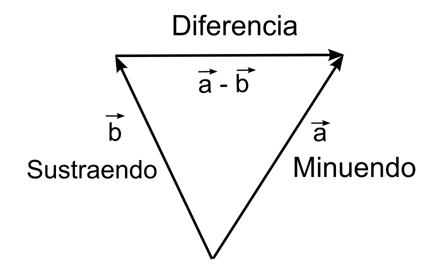


Figura 1.12 Diferencia

Es bueno notar que vector cero tiene magnitud de 0, o sea $|\ \vec{0}\ | = 0$ y se le puede atribuir cualquier dirección. Si se tiene el vector $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ decimos que el vector cero es aquel donde el origen A coincide con el extremo B.

Ejemplo 1. *Si se tiene un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ ¿Cuántos vectores se requieren para su representación?, exprese las diferentes posibilidades.*

En la figura 1.13 aparecen algunas maneras de representar un triángulo de forma vectorial utilizando solamente dos vectores:

[6]Se entiende por ley clausurativa cuando en una operación binaria se da como resultado un elemento que tiene las misma características o naturaleza de quienes lo producen.

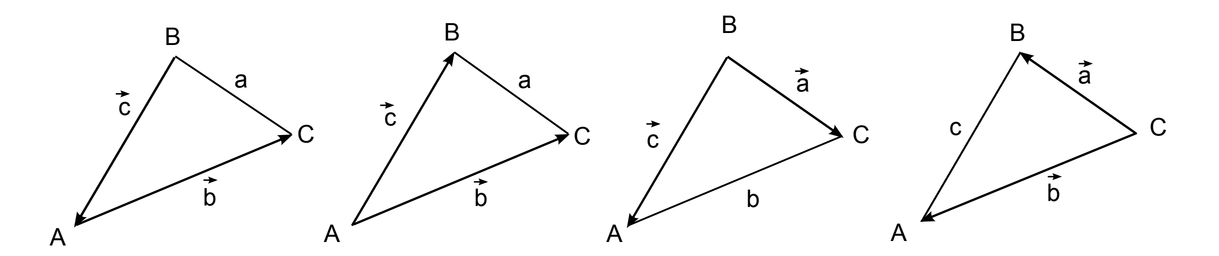


Figura 1.13 Diferentes soluciones con dos vectores

1.2.6 REFERENCIA VECTORIAL

En la gráfica 1.14 se observa una figura geométrica representada por segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, ahora podemos, desde un punto cualquiera O, hacer referencia posicional de la figura geométrica utilizando vectores que parten desde este origen, este origen se puede determinar o escoger de forma arbitraria[7], por ejemplo si se tiene el triángulo $\triangle ABC$ y el punto O, no perteneciente al triángulo, se puede expresar cada lado como función de tres vectores externos: $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, en la figura 1.14, el triángulo $\triangle ABC$ queda completamente definido o representado por los vectores posición $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ que parten del origen O.

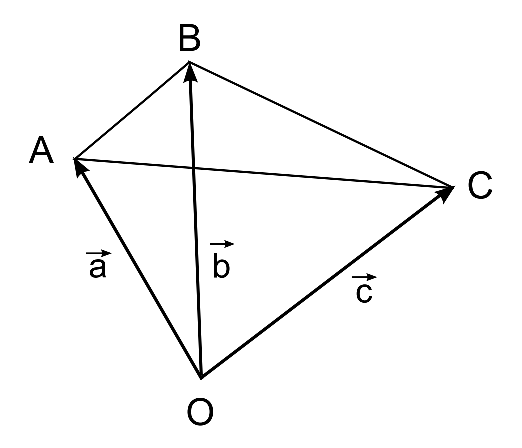


Figura 1.14 Referencia vectorial desde O

Se observa que

[7]Se denomina origen ficticio.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}\\ \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{c} - \vec{b}\\ \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \vec{a} - \vec{c}\end{aligned}$$

A manera de ejemplo si tenemos la operación $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$ será:

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB} &= 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) - 3(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})\\ &= 2(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}) - 3(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO})\end{aligned}$$

Observemos el cambio de sentido de varios vectores.

Existe por lo tanto un enfoque referencial para resolver problemas vectoriales, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. *Supongamos que tenemos un triángulo $\triangle ABC$, si definimos los puntos medios del cada lado así: M, N, P de BC, CA, AB respectivamente, demuestre que*

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$$

Demostración: Si escogemos un punto arbitrario O entonces: $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}$, de aquí se llega a:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}\\ \overrightarrow{ON} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}\\ \overrightarrow{OP} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}\\ \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} &= (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC})\\ &= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}}{2} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OB}}{2} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}}{2}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

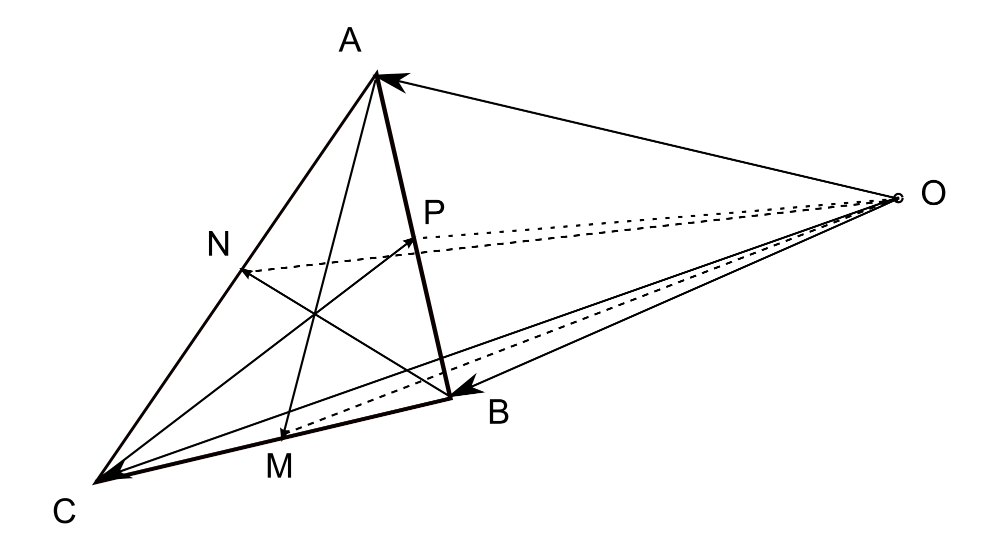


Figura 1.15 Ejemplo referencia vectorial

1.2.7 MULTIPLICACIÓN POR ESCALARES (ESCALAMIENTO)

Si se tiene un vector $\overrightarrow{A}$ y dado un escalar o un número $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq 0$, podemos generar otro vector $\overrightarrow{B}$ tal que tenga la misma dirección y sentido del vector $\overrightarrow{A}$; esto define el paralelismo entre vectores, ahora si se tiene un vector cuya magnitud es $|\alpha\overrightarrow{A}|$, se puede cambiar el sentido del vector $\overrightarrow{B}$ si cambiamos $\alpha > 0$ por $\alpha < 0$. Por lo tanto si tenemos la relación $\overrightarrow{B} = \alpha\overrightarrow{A}$ esta relación nos está indicando el paralelismo entre los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$.

Observemos el siguiente ejemplo en la figura 1.16 en donde la suma de dos vectores amplificados por los factores escalares α y β nos generan el vector $\overrightarrow{D}$ que no necesariamente es paralelo al vector suma $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$.

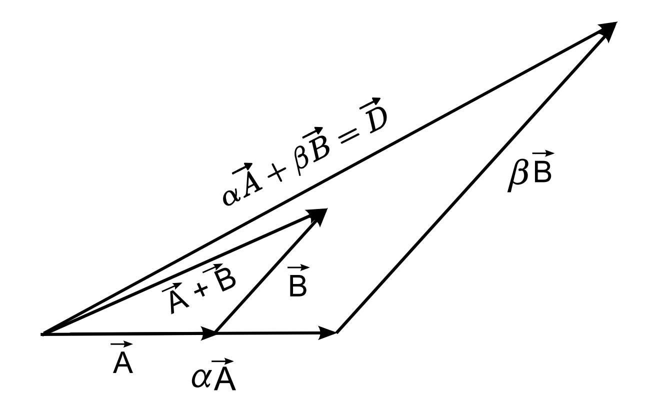


Figura 1.16 Producto por escalares

Para que los dos vectores fueran paralelos sería necesario lo siguiente:

$$\text{que} \quad \alpha = \beta \quad \text{tal que} \quad \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} = \alpha(\vec{A} + \vec{B})$$

Veamos las propiedades que tiene el producto de un escalar por un vector:

1.2.7.1 PROPIEDADES DEL ESCALAMIENTO

1. $n(-\vec{A}) = -n\vec{A}$
2. $n\vec{A} = \vec{0}$, si $\vec{A} \neq \vec{0}$, entonces $n = 0$
3. $n\vec{A} = \vec{0}$, si $n \neq 0$, entonces $\vec{A} = \vec{0}$
4. $nm\vec{A} = n(m\vec{A}) = m(n\vec{A})$
5. $|m\vec{A}| = |m||\vec{A}|$
6. $(m+n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$
7. $|m+n||\vec{A}| = |m||\vec{A}| + |n||\vec{A}|$ si m y n son del mismo signo.
8. $|m+n||\vec{A}| = |(|m| - |n|)||\vec{A}|$, si son n y m de signos diferentes
9. $m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$

1.2.8 EL VECTOR UNITARIO

Si se tiene un vector $\vec{A}$ cuya magnitud es $|\vec{A}|$, con $|\vec{A}| \neq 0$, se define como vector unitario a $\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$. Recordemos que $\vec{u} = m\vec{A}$ por lo tanto $m = \frac{1}{|\vec{A}|}$, de aquí se concluye que $|\vec{u}| = 1$.

1.2.9 PROBLEMAS

Problema 1.2.5. *¿Por qué se puede decir que en una dirección de un vector existen dos sentidos?*

Problema 1.2.6. *Describa cinco ejemplos de magnitudes escalares y vectoriales tomados de la física.*

Problema 1.2.7. *Demostrar que* $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AM}$ *siendo* M *el punto medio de* BC *del triángulo* ABC.

Problema 1.2.8. *Dados dos vectores diferentes no paralelos,* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$*, demostrar que* $\vec{a} + \vec{b}$ *y* $\vec{a} - \vec{b}$ *son vectores bisectrices del ángulo formado por los dos vectores* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *.*

Problema 1.2.9. *En un triángulo* ABC*, se marcan tres puntos medios de los respectivos lados, D para* AB*, E para* BC*, y F para* CA*; mostrar gráficamente que:*

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

Problema 1.2.10. *Dado un triángulo* ABC*, si se tiene un punto* P *en el lado* BC*, entonces* $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$*, demuestre que* $\lambda + \mu = 1$.

Problema 1.2.11. *Dados cuatro puntos en* $\mathbb{R}^2$*, A, B, C y D, demostrar que*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{PQ}$$

donde los puntos P *y* Q *son los puntos medios de* AC *y* BD.

Problema 1.2.12. *Demuestre que la suma de los vectores* $\vec{a}$*,* $\vec{b}$*,* $\vec{c}$ *es igual al vector nulo o cero en el triángulo equilátero* ABC *que se encuentra inscrito en la circunferencia O, ver la figura 1.17*

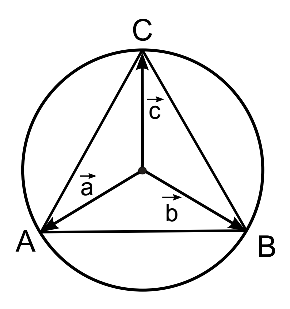


Figura 1.17 Problema: 1.2.12

Problema 1.2.13. *En la figura 1.18 se tiene un triángulo equilátero* ABC *en donde se han colocado los vectores que corresponden a dos de sus lados como* $\overrightarrow{AB}$ *y el vector* $\overrightarrow{AC}$*, aparecen otros vectores; si* $|\overrightarrow{AB}| = m$*; el vector* $\overrightarrow{PQ}$ *es paralelo al vector* $\overrightarrow{AB}$ *y* $|\overrightarrow{PQ}| = m/3$. *Hallar los siguientes vectores:* $\overrightarrow{AP}$*,* $\overrightarrow{PQ}$*,* $\overrightarrow{PB}$*,* $\overrightarrow{AQ}$ *en función de los dos vectores principales* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{AC}$*.*

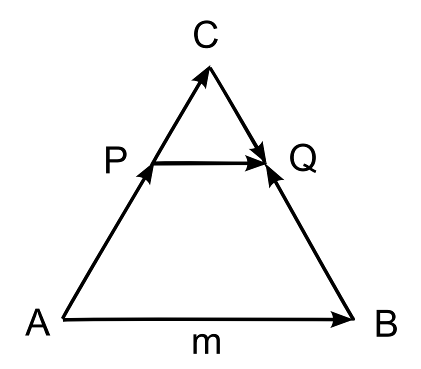


Figura 1.18 Problema: 1.2.13

Problema 1.2.14. *En la gráfica siguiente 1.19 se tiene un trapecio equilátero $ABCD$ en donde se han superpuesto algunos vectores correspondientes sobre los lados o segmentos de lados: las bases $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, los lados congruentes como $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{DB}$; el lado AB tiene una magnitud de 10 unidades, los lados congruentes tienen 5 unidades. Hallar el vector $\overrightarrow{PQ}$ que parte del punto medio de un lado hasta el punto medio del otro lado, determinar el vector $\overrightarrow{AD}$ y su magnitud.*

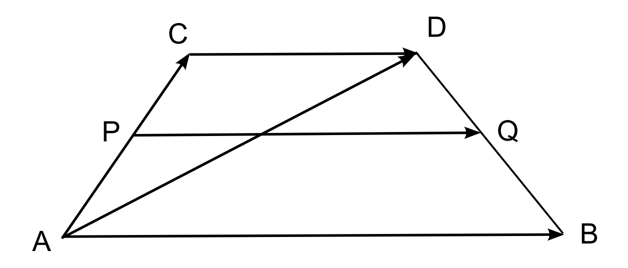


Figura 1.19 Problema: 1.2.14

Problema 1.2.15. *Se tiene un paralelogramo, como el de la figura 1.20, utilizando el enfoque vectorial, demostrar que el segmento $\overline{EO}$ es igual al segmento $\overline{OF}$ si el punto O es el punto medio del segmento $\overline{AC}$.*

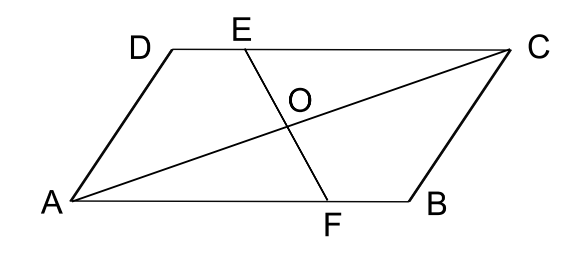


Figura 1.20 Problema: 1.2.15

Problema 1.2.16. *Sea $ABCDE$ un pentágono regular, ver 1.21, la magnitud de cada lado es de 2 unidades hallar:*

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

b) El ángulo DAC

c) La magnitud del vector $\overrightarrow{AC}$

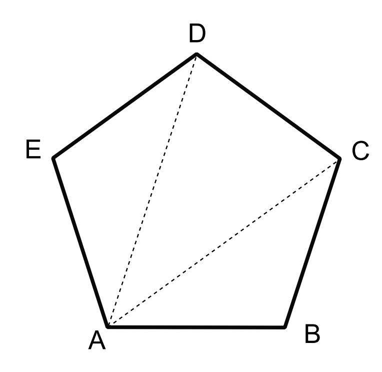


Figura 1.21 Problema: 1.2.16

Problema 1.2.17. *Consideremos un trapecio cualquiera, y sean P y Q los puntos medios de las diagonales. Probar que $\overline{PQ}$ es paralelo a la base del trapecio y que la magnitud del segmento $\overline{PQ}$ es $\frac{1}{2}(\mid \overrightarrow{AB} \mid - \mid \overrightarrow{DC} \mid)$. Ver figura 1.22.*

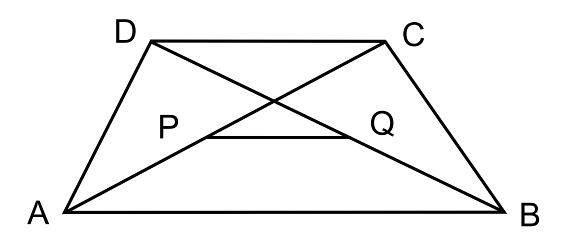


Figura 1.22 Problema1.2.17

1.3 DEPENDENCIA LINEAL

Sean $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ tres vectores, no paralelos en un plano, y nos proponemos generar uno de estos vectores en función de los otros dos. Observemos la figura 1.23 en donde el vector $\vec{C}$ lo construiremos a partir de los vectores múltiplos de los otros dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

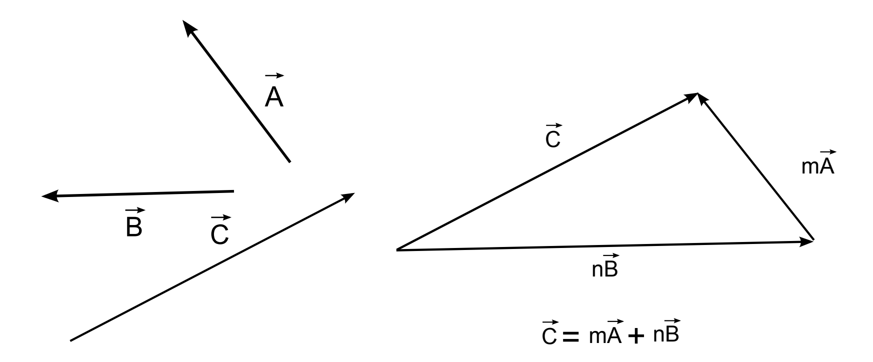


Figura 1.23 Dependencia lineal del vector C

Se desea generar el vector $\vec{C}$ en función del los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, para esto buscaremos los escalares m, n tal que $m\vec{A} + n\vec{B} = \vec{C}.$ Una pregunta interesante es: ¿Son estos escalares únicos?

Definiremos la suma $m\vec{A} + n\vec{B}$ como la combinación lineal[8] de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Se puede decir en forma recíproca que dado un vector, éste se puede descomponer en dos[9] vectores y dos escalares. Señalemos que los tres vectores deben pertenecer a un mismo plano. Es realmente importante que el lector observe que no podemos generar el vector $\vec{B}$ a partir del vector $\vec{A}$ a menos que exista paralelismo entre vectores. Los términos $m\vec{A}$ y $n\vec{B}$ se denominan componentes del vector $\vec{C}$, el vector $\vec{A}$ y el $\vec{B}$ se llaman vectores base.

Analicemos la siguiente situación de los escalares m y n. ¿Qué se obtiene de la siguiente ecuación vectorial?

$$m\vec{A} + n\vec{B} = \vec{0} \tag{1.2}$$

Supongamos que los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ son diferentes del vector cero. Se tiene, por lo tanto, de la ecuación 1.2 que $m\vec{A} = -n\vec{B}$ de donde concluimos que los vectores deben ser necesariamente paralelos. Si los vectores no son paralelos entonces se concluye que $n = m = 0$.

Si se tiene la expresión 1.3 y los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ no son paralelos entonces procedemos a demostrar la unicidad de m y n. Supongamos que existen otros escalares p y q tal que:

$$m\vec{A} + n\vec{B} = p\vec{A} + q\vec{B} \tag{1.3}$$

8 Para una definición más rigurosa referirse a textos de álgebra lineal.
9 Esta es la cantidad mínima de vectores, pueden haber más en la composición.

$$m\vec{A} + n\vec{B} = p\vec{A} + q\vec{B}$$
$$(m-p)\vec{A} + (n-q)\vec{B} = \vec{0}$$
$$m - p = 0$$
$$n - q = 0$$
$$m = p$$
$$n = q$$

1.3.1 PROBLEMAS

Problema 1.3.1. *Calcular los valores de* m *y de* n *tal que* $\vec{A} = m\vec{B} + n\vec{C}$ *si se tiene que* $|\vec{A}| = 5$, $|\vec{B}| = 3$, $|\vec{C}| = 1$, *ver la figura 1.24:*

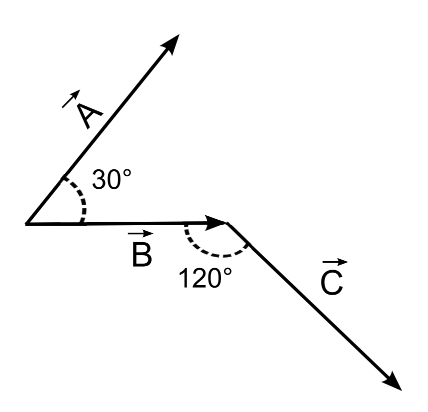


Figura 1.24 Problema1.3.1

Problema 1.3.2. *Calcular los valores de* m *y de* n *tal que* $\vec{A} = m\vec{B} + n\vec{C}$ *si se tiene que* $|\vec{A}| = 2$, $|\vec{B}| = 3$, $|\vec{C}| = 6$, *ver la figura 1.25:*

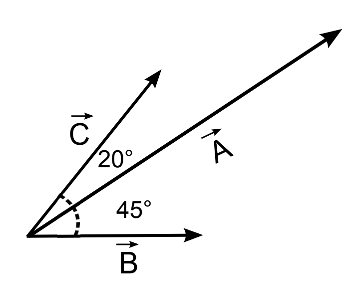


Figura 1.25 Problema1.3.2

Problema 1.3.3. *Si se tiene que* $|\vec{A}| = 4$, $|\vec{B}| = 5$, $|\vec{C}| = 3$, *ver la figura 1.26, expresar el vector* $\vec{A}$ *en función de* $\vec{B}$ *y de* $\vec{C}$

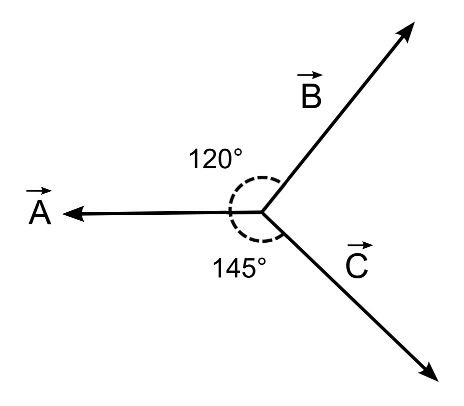


Figura 1.26 Problema1.3.3

Problema 1.3.4. *Encontrar el valor de* $\mid \vec{A} + \vec{B} \mid$ *si el ángulo* $\theta = \pi/3$ *y las magnitudes de los vectores mencionados valen 3 unidades, ver figura 1.27*

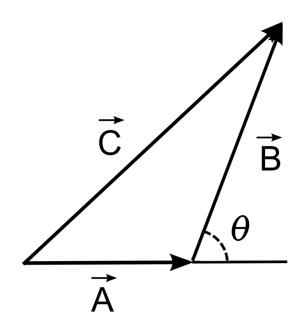


Figura 1.27 Problema 1.3.4

Problema 1.3.5. *Probar que* $\mid \vec{A} \mid - \mid \vec{B} \mid \leq \mid \vec{A} \pm \vec{B} \mid \leq \mid \vec{A} \mid + \mid \vec{B} \mid$, *ver figura 1.28*

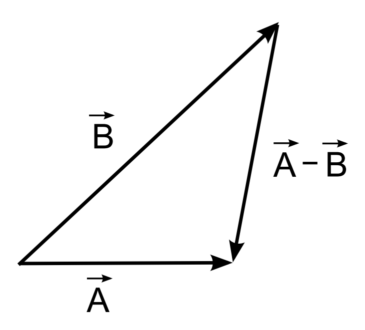


Figura 1.28 Problema 1.3.5

Problema 1.3.6. *Dados los vectores* $2\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{c}$ *y* $-3\vec{a} + 5\vec{b} = \vec{d}$ *expresar el vector* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *como combinación lineal de los vectores* $\vec{c}$ *y* $\vec{d}$.

Problema 1.3.7. *Probar que si en un trapecio $ABCD$ las bisectrices de los ángulos D y C se cortan en la base AB y además concurren en el punto Q, dicha base es igual a la suma de los lados no paralelos, ver figura 1.29.*

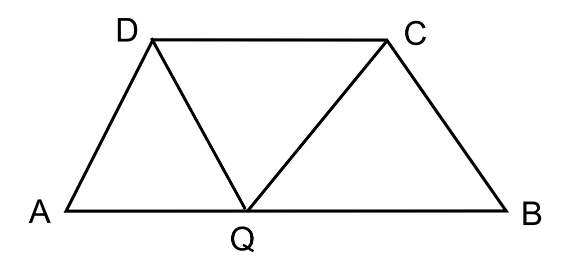


Figura 1.29 Problema1.3.7

1.4 FORMA SIMÉTRICA DE UN VECTOR

Si escogemos un origen O y desde este punto ubicamos los puntos P y Q utilizando dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, queda definido el segmento PQ y si entre[10] los puntos P y Q se ubica un punto R que pertenezca a este segmento, ver figura 1.30, entonces tenemos la manera de definir la forma simétrica de un vector:

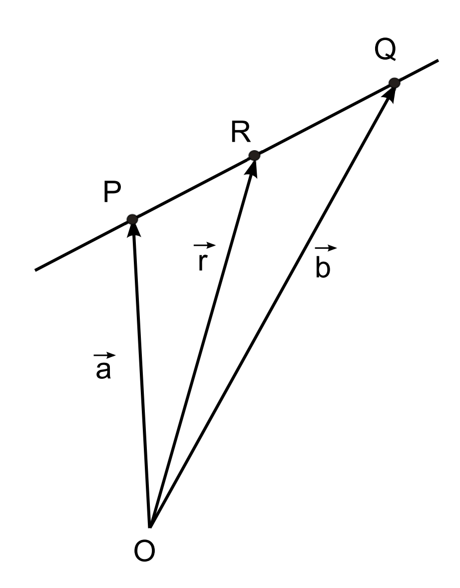


Figura 1.30 Forma simétrica de un vector

De la gráfica se pueden obtener los siguientes vectores: $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{RQ}$ que son, por hipótesis

[10]Diremos que un punto R está entre dos puntos P y Q si $P < R < Q$, y los tres puntos son colineales tal que $PR + RQ = PQ$, este es un axioma de orden, ver [7].

paralelos, $\overrightarrow{PR} = \vec{r} - \vec{a}$, $\overrightarrow{RQ} = \vec{b} - \vec{r}$.

$$\overrightarrow{PR} = k\overrightarrow{RQ}, \quad \text{por lo tanto} \quad \vec{r} - \vec{a} = k(\vec{b} - \vec{r})$$

$$\vec{r} + k\vec{r} = \vec{a} + k\,\vec{b} \quad \text{luego llegamos a} \quad \boxed{\vec{r} = \frac{\vec{a} + k\,\vec{b}}{1+k}}, \quad k \neq -1 \tag{1.4}$$

que es denominada forma simétrica de un vector.

Si $|PR| = p\ |RQ| = q$ donde $k = \dfrac{|\overrightarrow{PR}|}{|\overrightarrow{RQ}|} = \dfrac{p}{q}$ en (1.4) se puede expresar como:

$$\vec{r} = \frac{q\,\vec{a} + p\,\vec{b}}{p+q} \tag{1.5}$$

Si utilizamos fracciones o partes de la longitud total del segmento $\overline{PQ}$ se tendría entonces que: $\lambda_1 = \dfrac{q}{p+q}$ y también $\lambda_2 = \dfrac{p}{p+q}$, o sea que se puede expresar la ecuación simétrica de un vector como:

$$\vec{r} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = \lambda_1\vec{a} + (1-\lambda_1)\,\vec{b} \tag{1.6}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \tag{1.7}$$

De esta teoría, podemos inferir el siguiente lema:

Lema 1. *Dados tres puntos P, Q y R, definidos por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{r}$ respectivamente, decimos que son colineales si:*

$$\alpha\vec{r} + \beta\vec{a} + \gamma\,\vec{b} = \vec{0} \tag{1.8}$$

Cuando $\alpha + \beta + \gamma = 0$

1.4.1 APLICACIONES GEOMÉTRICAS

Ejemplo 3. *Dado un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ los segmentos que unen los puntos medios de cada dos lados son paralelos al lado restante.*

Ver figura 1.31. En los libros de geometría sintética [2] se encuentra el problema anterior como un teorema expresado así:

Teorema 1.1. *Si por el punto medio de un lado de un triángulo, se traza una paralela a la base, esta paralela pasa por el punto medio del tercer lado.*

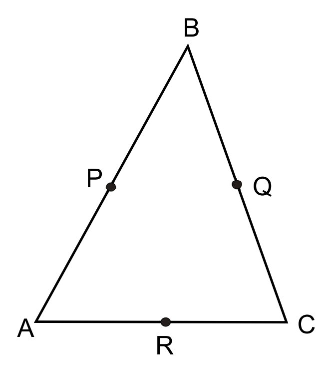


Figura 1.31 Puntos medios

Procederemos a ilustrar la demostración así: sobre el triángulo $\triangle ABC$ aplicaremos la adherencia de vectores sobre los lados AB y AC; observemos que los puntos P, Q, R son los puntos medios de los lados del triángulo. Si aplicamos la expresión 1.4 para ubicar el punto Q usando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} \\ \overrightarrow{AP} &= 1/2\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned} \tag{1.9}$$

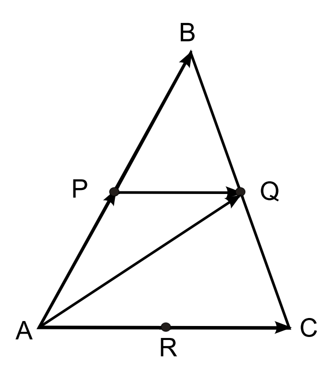


Figura 1.32 Puntos medios

Llegamos a la expresión $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ lo cual nos indica que los vectores son paralelos quedando demostrado el teorema 1.1.

Ejemplo 4. *Demostrar que las medianas de un triángulo cualquiera se cortan o concurren en un punto común.*

Solución: Veamos la siguiente figura 1.33 donde se tiene un triángulo cualquiera $\triangle ABC$

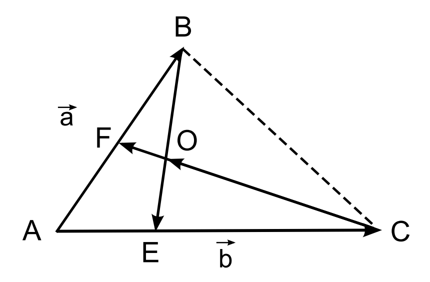


Figura 1.33 Corte de las medianas

El vector $\overrightarrow{CF}$ representa la mediana que corresponde al lado AB y el vector $\overrightarrow{BE}$ corresponde a la mediana del lado AC tenemos entonces que $\overrightarrow{CO} = k_1\overrightarrow{CF}$, siendo, para este caso, $k_1 \in \mathbb{R}$, $k_1 < 1$. Suponemos que el punto O es el punto de concurrencia de las medianas, este punto es llamado también baricentro. El vector $\overrightarrow{OE} = k_2\overrightarrow{BE}$. El triángulo $\triangle ABC$ de la figura 1.33 es representado por sólo dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$; se tiene por lo tanto que:

$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$
$$\overrightarrow{CO} = k_1\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right)$$
$$k_1\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) + k_2\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) = -\frac{1}{2}\vec{b}$$
$$\vec{a}\left(\frac{k_1}{2} - k_2\right) + \vec{b}\left(\frac{k_2}{2} - k_1\right) = -\frac{1}{2}\vec{b}$$

De la ecuación última se concluye que: $\dfrac{k_1}{2} - k_2 = 0$ y $\dfrac{k}{2} - k_1 = -\dfrac{1}{2}$

Luego llegamos a $k_2 = \dfrac{1}{3}$ y para el otro factor $k_1 = \dfrac{2}{3}$, situación similar tendríamos si realizamos el mismo proceso con la otra mediana, quedando así demostrado que las medianas concurren en un punto a 2/3 del vértice de donde parten.

Ejemplo 5. *Demostrar que el centro de gravedad o baricentro de un triángulo cualquiera es igual al punto de concurrencia de las medianas y esto corresponde a un vector, de referencia externa O, que es igual al promedio de los tres vectores de los vértices del triángulo.*

Veamos la figura 1.34 que nos ilustra el problema a resolver:

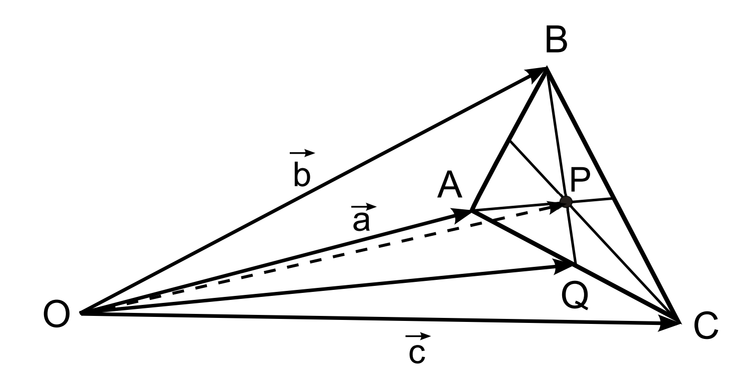


Figura 1.34 Vector baricentro de un triángulo

Los vectores $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ ubican a los vértices del triángulo, el punto Q es el punto medio, por hipótesis, del lado AC, el punto P es el baricentro del triángulo. Por el ejemplo (4) decimos que el segmento BP, que corresponde a una $2/3$ de la mediana BQ y el segmento PQ es $1/3$ de la misma mediana, entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{c}}}{2} \quad \text{ahora para el vector que ubica a } P \text{ tenemos que}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\frac{2}{3}\overrightarrow{OQ} + \frac{1}{3}\vec{\mathbf{b}}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{c}}}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)\vec{\mathbf{b}} = \frac{\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}}{3}$$

Ejemplo 6. *Dado un paralelogramo $ABCD$ y sean P y Q los puntos medios de los lados BC y CD; demostrar que AP y AQ dividen a la diagonal BD en tres partes o segmentos iguales, ver figura 1.35.*

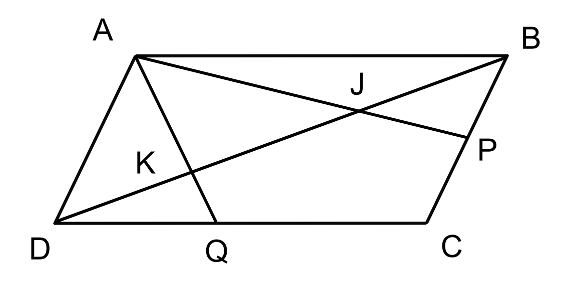


Figura 1.35 Trisección de segmento

En la figura 1.36 se han superpuesto los vectores al paralelogramo $ABCD$ y dado que los lados opuestos son paralelos solamente se emplearán dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

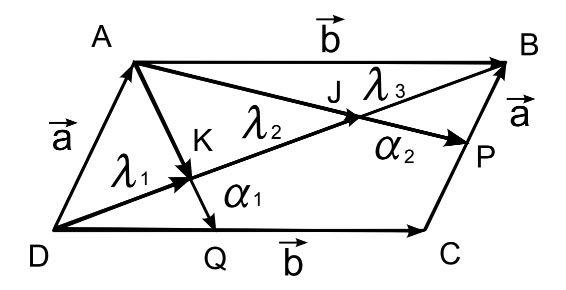


Figura 1.36 Representación vectorial

La diagonal DB está dividida en tres partes, DK, KJ, JB, no necesariamente iguales, tales que $\dfrac{DK}{DB} = \lambda_1$, $\dfrac{KJ}{DB} = \lambda_2$, $\dfrac{JB}{DB} = \lambda_3$; se puede rápidamente inferir que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

Favor observar la ecuación 1.7, también en la figura 1.36 tenemos que $\alpha_1 = \dfrac{KQ}{AQ}$ y para el segmento AP será $\alpha_2 = \dfrac{JP}{AP}$

Ahora se plantean las ecuaciones siguientes:

$$\overrightarrow{DK} = \lambda_1 \left(\vec{a} + \vec{b}\right), \quad \overrightarrow{KJ} = \lambda_2 \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \quad \overrightarrow{JB} = \lambda_3 \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

Sumando los vectores que representan los segmentos $\overline{DK}$, $\overline{KQ}$ se llega a:

$$\lambda_1 \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \alpha_1 \left(\frac{\vec{b}}{2} - \vec{a}\right) = \frac{\vec{b}}{2}$$

Factorizando los vectores tendríamos:

$$\vec{a}\,(\lambda_1 - \alpha_1) + \vec{b}\left(\lambda_1 + \frac{\alpha_1}{2}\right) = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\text{llegamos a} \quad \lambda_1 - \alpha_1 = 0 \quad \wedge \quad \lambda_1 + \frac{\alpha_1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{3}$$

Para el segmento $\overline{AP}$ se tiene, entonces:

$$(1 - \alpha_2)\left(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\right) + \lambda_3 \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{b} \text{ y factorizando los vectores}$$

$$\vec{a}\left(\lambda_3 - \frac{1}{2}(1 - \alpha_2)\right) + \vec{b}\left((1 - \alpha_2) + \lambda_3\right) = \vec{b}$$

$$\left(\lambda_3 - \frac{1}{2}(1 - \alpha_2)\right) = 0 \quad \wedge \left((1 - \alpha_2) + \lambda_3\right) = 1$$

se concluye que $\lambda_3 = \frac{1}{3}$ y como $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \implies \lambda_2 = \frac{1}{3}$

Por lo tanto la diagonal queda dividida en tres partes iguales como se pedía.

Ejemplo 7. *Demostrar que las medianas de un triángulo cualquiera forman otro triángulo que conserva las magnitudes y direcciones de las medianas, además la relación del área de estos dos triángulo es constante.*

Solución: Dado un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ con sus respectivas medianas, AK, BH, CJ, ver figura 1.37.

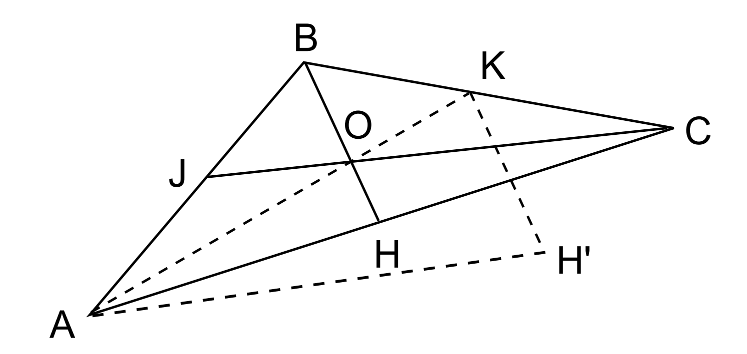


Figura 1.37 Triángulo de medianas

La idea es demostrar que las medianas forman un triángulo cuyos lados son paralelos a los segmento-medianas, el triángulo aquí representado es AKH'.
Usaremos la gráfica 1.38 para soportar los elementos vectores sobre el triángulo.

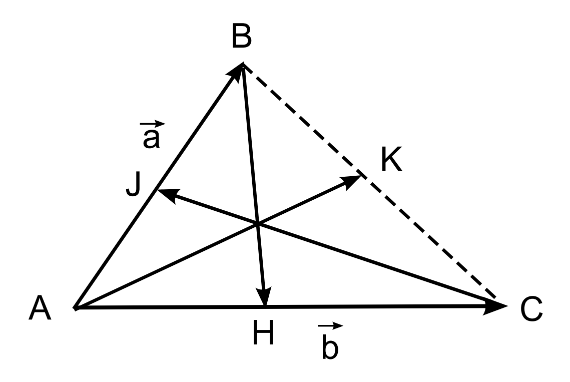


Figura 1.38 Triángulo vectorial de medianas

Para desarrollar la demostración sumaremos los vectores que representan las medianas:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CJ}&=\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)+\left(\frac{\vec{b}}{2}-\vec{a}\right)+\left(\frac{\vec{a}}{2}-\vec{b}\right)\\&=\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{2}+\frac{\vec{b}}{2}+\frac{\vec{a}}{2}-\vec{b}-\vec{a}=\vec{0}\end{aligned} \tag{1.10}$$

Si la resultante es el vector cero, entonces, nos indica que los tres vectores forman una figura cerrada; quedando así demostrado que es un triángulo cuyos lados son paralelos a las medianas.

Para el cálculo de la relación de áreas observemos la figura 1.39 en donde aparece un nuevo triángulo $\triangle AKD$ construido por las medianas con sus respectivos vectores.

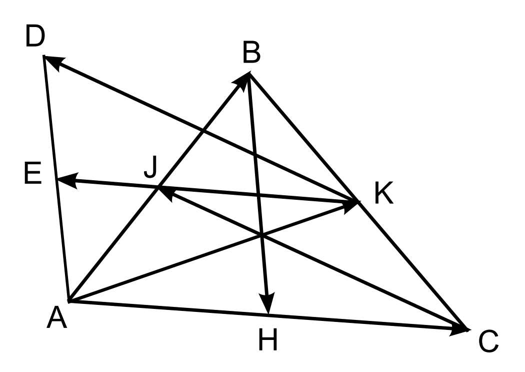


Figura 1.39 Triángulo de medianas

El segmento AD es paralelo al vector $\overrightarrow{BH}$, el vector $\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{CJ}$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KE}&=\frac{\overrightarrow{KD}+(-\overrightarrow{AK})}{2}=\frac{\overrightarrow{CJ}-\overrightarrow{AK}}{2}\\&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\vec{a}}{2}-\vec{b}\right)-\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[-\vec{b}-\frac{\vec{b}}{2}\right]=-\frac{3}{4}\vec{b}\end{aligned} \tag{1.11}$$

Esto significa que la longitud de las medianas del triángulo hecho de medianas del triángulo $\triangle ABC$ son las tres cuartas partes de los lados del triángulo $\triangle ABC$.
Ahora procedemos a calcular la relación de áreas de estos dos triángulos, para esto emplearemos el resultado en la ecuación 1.11 y usaremos la figura 1.40

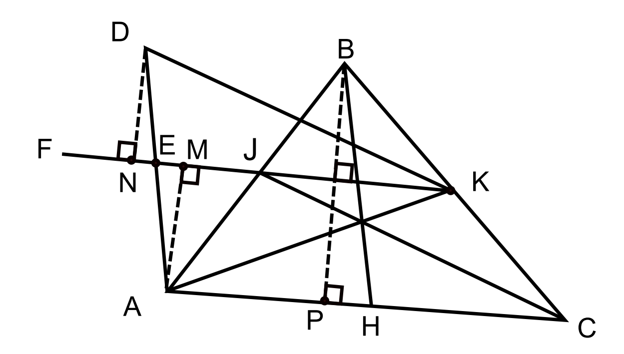


Figura 1.40 Cálculo de áreas

Tenemos que el área del triángulo $\triangle ABC$ tiene como base el lado AC y por altura el segmento BP luego su área es $(BP)(AC)/2$, ahora el área del triángulo $\triangle AKD$ es igual a la suma de los triángulos $\triangle KED$ y $\triangle KEA$ entonces tenemos que la suma es igual a:

$$(KE)(DN)/2 + (KE)(MA)/2 = (KE)/2[DE + MA]$$

siendo KF paralela al lado AC nos queda claro que $DN+MA = BP$, además conocemos que $KE = 3/4AC$ entonces el área del triángulo $\triangle AKD$ será igual a $(BP)(3/4AC)/2$ entonces la relación de las áreas será:

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle AKD}} = \frac{(BP)(AC)/2}{(BP)(3/4AC)/2} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 8. *Dado un triángulo cualquiera estamos interesados en ubicar un punto, en cualesquiera de los lados, tal que el vértice y el punto generen un segmento bisector.*

Solución
Supongamos que tenemos un triángulo $\triangle ABC$ y sobre el lado a deseamos ubicar un punto H tal que el segmento $\overline{AH}$ sea una bisectriz del ángulo $\angle CAB$, en la figura 1.41 el vector $\overrightarrow{AH}$ ubica H en el segmento BC, lado a.

Existe un teorema de la geometría euclidiana que dice: *"La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos lados"*, ver [3].

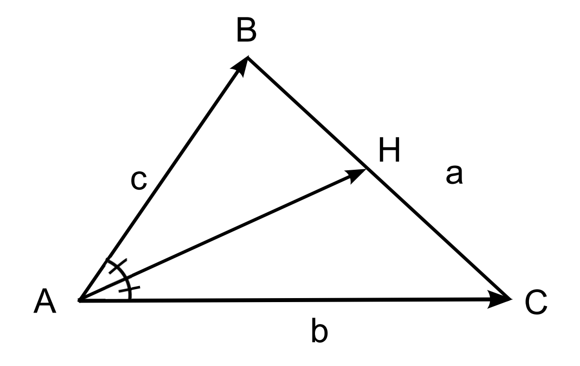


Figura 1.41 Vector bisectriz

Si en la figura 1.41 aplicamos el teorema –arriba mencionado– se tendría la expresión:

$$\frac{c}{BH} = \frac{b}{HC}$$

Se tiene que: $\frac{c}{b} = \frac{BH}{HC}$ Ahora apliquemos a 1.4 $k = \frac{BH}{HC}$ que nos lleva a:

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k} = \frac{\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b}\overrightarrow{AC}}{1+\frac{c}{b}} = \frac{\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b}}{\frac{1}{c} + \frac{1}{b}}$$

Por lo tanto podemos, en general decir que:

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}}{\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{1}{|\overrightarrow{AC}|}} \tag{1.12}$$

La ecuación anterior también se puede escribir en función de vectores unitarios:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \mathbf{u}_{AB} \quad \text{y} \quad \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \mathbf{u}_{AC}$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\mathbf{u}_{AB} + \mathbf{u}_{AC}}{\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{1}{|\overrightarrow{AC}|}}$$

Por último podemos expresar el vector bisectriz como:

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{|\overrightarrow{AC}|\,\overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|\,\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{|\vec{b}|\,\vec{c} + |\vec{c}|\,\vec{b}}{|\vec{b}| + |\vec{c}|}} \tag{1.13}$$

Teorema 1.2 (CEVA)**.** *Sean X, Y, Z puntos de los lados BC, CA y AB respectivamente de un triángulo $\triangle ABC$. Los segmentos $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ y $\overline{CZ}$ se denominan cevianas, término que procede del matemático italiano Giovanni Ceva (1647-1734). Si las tres cevianas AX, BY y CZ son concurrentes se verifica que:*

$$\boxed{\frac{p \cdot q \cdot r}{m \cdot n \cdot l} = 1} \tag{1.14}$$

siendo $p = AZ$, $m = ZB$, $q = BX$, $n = XC$, $r = CY$, $l = YA$

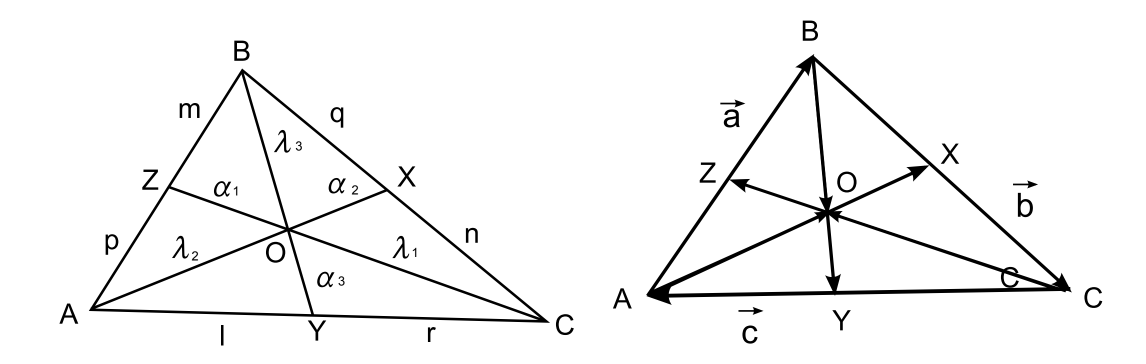


Figura 1.42 Concurrencia de cevianas

Demostración
En la figura 1.42 se han, claramente, marcado los segmentos del triángulo formado por el punto Z que son: p y m; del punto X que son: q y n; y para el punto Y son: r y l. En la figura, también, se tiene el mismo triángulo con los vectores superpuestos. Los vectores principales que representan los lados son $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, luego $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$; no olvidemos que el lado AC se expresa como $-\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, cuya magnitud será $|-\vec{c}| = c$, para el lado AB será de magnitud $|\vec{a}| = a$, por último $|\vec{b}| = b$. Los escalares λ representan la fracción de cada ceviana respecto al segmento del vértice hasta el punto O, para ajustar la magnitud de los vectores de 1.42, tenemos que:

$$\lambda_1 = \frac{\overline{CO}}{\overline{CZ}}, \quad \lambda_2 = \frac{\overline{AO}}{\overline{AX}}, \quad \lambda_3 = \frac{\overline{BO}}{\overline{BY}}$$

Para los escalares en α, vemos que:

$$\alpha_1 = \frac{\overline{OZ}}{\overline{CZ}}, \quad \alpha_2 = \frac{\overline{OX}}{\overline{AX}}, \quad \alpha_3 = \frac{\overline{OY}}{\overline{BY}}$$

Noten que la ceviana BY se fracciona en dos vectores así: $\lambda_3\overrightarrow{BY}$ y el otro vector es $\alpha_3\overrightarrow{BY}$, recordemos (ver ecuación 1.7) que $\alpha_3 + \lambda_3 = 1$, $\alpha_2 + \lambda_2 = 1$, $\alpha_1 + \lambda_1 = 1$. Aplicando la

forma simétrica de un vector, ver 1.4, se consiguen las siguientes ecuaciones:

$$\lambda_1 \left[\frac{m(-\vec{a} - \vec{b}) - p\,\vec{b}}{a}\right] = \lambda_2 \left[\frac{n\,\vec{a} + q(\vec{a} + \vec{b})}{b}\right] - \vec{a} - \vec{b}$$

Si factorizamos los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se puede escribir la combinación lineal así:

$\vec{a}\left[-\frac{\lambda_1 m}{a} - \lambda_2 + 1\right] + \vec{b}\left[-\frac{\lambda_2 q}{b} - \lambda_1 + 1\right] = \vec{0}$, y se llega a las ecuaciones:

$$\frac{\lambda_1 m}{a} + \lambda_2 = 1 \qquad \frac{\lambda_2 q}{a} + \lambda_1 = 1$$

Si rotamos el triángulo (dos veces más) se pueden obtener, por analogía, dos ecuaciones por cada rotación, ejercicio interesante para el lector, logrando seis ecuaciones en total, en la tabla 1.1 se observan.

Cuadro 1.1 Rotaciones del triángulo

Posición 1		$\frac{\lambda_1 m}{a} + \lambda_2 = 1$	$\frac{\lambda_2 q}{b} + \lambda_1 = 1$
Posición 2		$\frac{\lambda_3 l}{c} + \lambda_1 = 1$	$\frac{\lambda_1 p}{a} + \lambda_3 = 1$
Posición 3		$\frac{\lambda_2 n}{b} + \lambda_3 = 1$	$\frac{\lambda_3 r}{c} + \lambda_2 = 1$

De este grupo de ecuaciones, al resolverlas, obtenemos $\frac{\lambda_3 l}{c} = \frac{\lambda_2 q}{b}$, $\frac{\lambda_1 p}{a} = \frac{\lambda_2 n}{b}$,

$\dfrac{\lambda_3 r}{c} = \dfrac{\lambda_1 m}{a}$, si las multiplicamos entre sí se llega a:

$$\frac{\lambda_1 p}{a} \cdot \frac{\lambda_2 q}{b} \cdot \frac{\lambda_3 l}{c} = \frac{\lambda_2 n}{b} \cdot \frac{\lambda_1 m}{a} \cdot \frac{\lambda_3 l}{c} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p \cdot q \cdot r}{m \cdot n \cdot l} = 1$$

También, si se suman las ecuaciones de las rotaciones según la tabla, llegamos a:

$$\frac{\lambda_1 m}{a} + \frac{\lambda_2 q}{b} + \frac{\lambda_3 l}{c} + \frac{\lambda_1 p}{a} + \frac{\lambda_3 r}{c} + \frac{\lambda_2 n}{b} + 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 6$$

Factorizando y simplificando se consigue la expresión:

$$\boxed{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2} \tag{1.15}$$

Y dado que $\lambda_i + \alpha_i = 1$, con $(i = 1, 2, 3)$ escribiremos la otra relación de α:

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1} \tag{1.16}$$

Teorema 1.3 (Menelao). *Sean P_1, P_2 y P_3 puntos respectivamente sobre los lados AB, BC y CA (o sus prolongaciones) de un triángulo ABC. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que los puntos P_1, P_2, P_3 estén alineados es siguiente:*

$$\frac{AP_1}{P_1B}\frac{BP_2}{P_2C}\frac{CP_3}{P_3A} = -1 \tag{1.17}$$

Veamos la figura 1.43

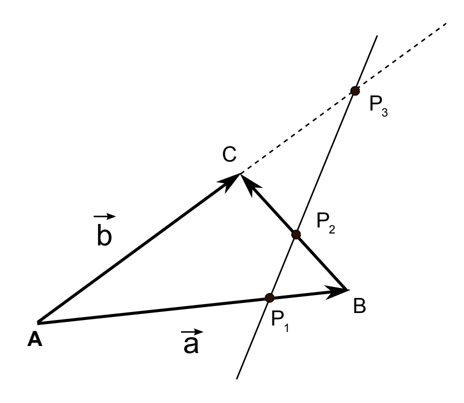


Figura 1.43 Teorema de Menelao

Demostración 1.1. *Sea $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ y $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, entonces $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$. Sea $\overrightarrow{AP_1} = n\vec{a}$, $\overrightarrow{P_1B} = (1 - n)\vec{a}$,*
$\overrightarrow{BP_2} = k(\vec{b} - \vec{a})$, $\overrightarrow{P_2C} = (1 - k)(\vec{b} - \vec{a})$, $\overrightarrow{CP_3} = (m - 1)\vec{b}$, y $\overrightarrow{P_3A} = -m\vec{b}$.

La condición necesaria para que P_1, P_2 y P_3 sean colineales aplicamos la ecuación 1.6 para obtener

$$\overrightarrow{AP_2} = t\overrightarrow{AP_1} + (1-t)\overrightarrow{AP_3} = tn\vec{a} + (1-t)m\vec{b}$$

Puesto que $\overrightarrow{AP_2} = (1-k)\vec{a} + k\vec{b}$, y $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores linealmente independientes, entonces $m = 1-k$ y $(1-t)m = k$, es decir:

$$n = \frac{1-k}{t} \qquad y \qquad m = \frac{k}{1-t}$$

Ahora si se sabe que $|\overrightarrow{AP_1}| = AP_1$, $|\overrightarrow{BP_2}| = BP_2$, $|\overrightarrow{CP_3}| = CP_3$, $|\overrightarrow{P_1B}| = P_1B$, $|\overrightarrow{P_2C}| = P_2C$, $|\overrightarrow{P_3A}| = P_3A$, es importante observar que si tomamos los segmentos de manera orientada entonces $AP_1 = -P_1A$, por lo tanto:

$$\frac{|\overrightarrow{AP_1}|}{|\overrightarrow{P_1B}|}\frac{|\overrightarrow{BP_2}|}{|\overrightarrow{P_2C}|}\frac{|\overrightarrow{CP_3}|}{|\overrightarrow{P_3A}|} = \Big(\frac{n}{1-n}\Big)\Big(\frac{k}{1-k}\Big)\Big(\frac{m-1}{-m}\Big)$$

$$\begin{aligned}\frac{|\overrightarrow{AP_1}|}{|\overrightarrow{P_1B}|}\frac{|\overrightarrow{BP_2}|}{|\overrightarrow{P_2C}|}\frac{|\overrightarrow{CP_3}|}{|\overrightarrow{P_3A}|} &= \Big(\frac{n}{1-n}\Big)\Big(\frac{k}{1-k}\Big)\Big(\frac{m-1}{-m}\Big) \\ &= \Big(\frac{1-k}{t-1+k}\Big)\Big(\frac{k}{1-k}\Big)\Big(\frac{k-1+t}{-k}\Big) = -1\end{aligned} \tag{1.18}$$

Teorema 1.4 (Desargues)**.** *Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ situados en un mismo plano están relacionados de manera que las rectas que unen vértices homólogos pasan por un mismo punto, los lados homólogos se cortan en puntos de una misma recta.*

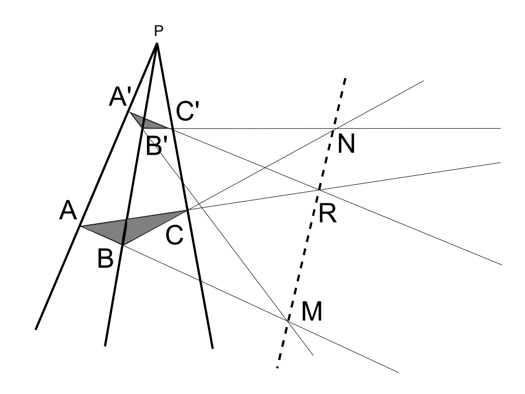


Figura 1.44 Teorema de Desargues

Sea O un punto cualquiera de referencia en el plano, entonces:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= x\overrightarrow{OA} + (1-x)\overrightarrow{OA'}\\ &= y\overrightarrow{OB} + (1-y)\overrightarrow{OB'}\\ &= z\overrightarrow{OC} + (1-z)\overrightarrow{OC'}\end{aligned}$$

Si consideramos que el lado AB no es paralelo al lado $A'B'$ entonces $x \neq y$ por lo tanto tenemos que:

$$\frac{x\overrightarrow{OA} - y\overrightarrow{OB}}{x-y} = \frac{(1-y)\overrightarrow{OB'} - (1-x)\overrightarrow{OA'}}{x-y}$$

Es decir existe un punto común a las líneas definidas por AB y por $A'B'$; llamaremos esta intersección el punto M, de manera similar $y \neq z$ y $z \neq z$ luego tenemos los puntos N y R comunes a las líneas BC y $B'C'$; similar para las líneas AC y $A'C'$ de manera respectiva puesto que:

$$\frac{y\overrightarrow{OB} - z\overrightarrow{OC}}{y-z} = \frac{(1-z)\overrightarrow{OC'} - (1-y)\overrightarrow{OB'}}{y-z}$$

y también:

$$\frac{z\overrightarrow{OC} - x\overrightarrow{OA}}{z-x} = \frac{(1-x)\overrightarrow{OA'} - (1-z)\overrightarrow{OC'}}{z-x}$$

Ahora

$$(x-y)\overrightarrow{OM}+(y-z)\overrightarrow{ON}+(z-x)\overrightarrow{OR} = x\overrightarrow{OA}-y\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OB}-z\overrightarrow{OC}+z\overrightarrow{OC}-x\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}$$

y si aplicamos el lema 1 entonces la suma de los coeficientes de $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ y $\overrightarrow{OR}$ es cero, por lo tanto M, N y R son colineales, ver ecuación 1.8, en la página 23.

Ejemplo 9. *Dado un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, con segmentos BP, CQ y AR proporcionales a los lados respectivos BC, CA y AB, siendo α la constante de proporcionalidad, tales que forman un triángulo interno definido por las intersecciones de los segmentos BQ, CR y AP como muestra la figura 1.45, calcularemos la relación de las áreas del triángulo $\triangle OMN$ respecto al área de $\triangle ABC$, además demostraremos que los triángulos BNC, AQC y BMA tienen áreas iguales, ver [11].*

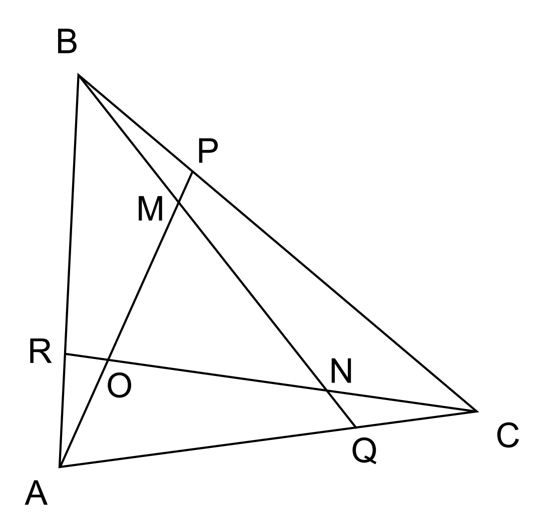


Figura 1.45 Ejemplo 9

Tenemos que para los segmentos BP, CQ y AR usaremos la constante de proporcionalidad α; para los segmentos BM, CN y AO emplearemos la constante γ, para los segmentos MP, NQ y OR usaremos la constante β, representamos estos segmentos como vectores así:

$$\overrightarrow{BP} = \alpha\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{CQ} = \alpha\overrightarrow{CA} \qquad \overrightarrow{AR} = \alpha\overrightarrow{AB} \tag{1.19}$$
$$\overrightarrow{BM} = \gamma\overrightarrow{BQ} \qquad \overrightarrow{CN} = \gamma\overrightarrow{CR} \qquad \overrightarrow{AO} = \gamma\overrightarrow{AP} \tag{1.20}$$
$$\overrightarrow{MP} = \beta\overrightarrow{AP} \qquad \overrightarrow{NQ} = \beta\overrightarrow{BQ} \qquad \overrightarrow{OR} = \beta\overrightarrow{CR} \tag{1.21}$$

Observemos que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Ahora en el triángulo $\triangle BPM$ se tiene que:

$$\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MP} = \beta\overrightarrow{AP} \tag{1.22}$$

Aplicando la ecuación de la forma simétrica de un vector 1.5

$$\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AC} + (1-\alpha)\overrightarrow{AB}$$

Entonces sustituyéndola en la ecuación 1.22 tenemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \gamma\left[\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) - \alpha\overrightarrow{AC}\right] &= \beta\left[\alpha\overrightarrow{AC} + (1-\alpha)\overrightarrow{AB}\right] \\
\alpha\overrightarrow{AC} - \alpha\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AB} - \gamma\alpha\overrightarrow{CA} &= \beta\alpha\overrightarrow{AC} + \beta(1-\alpha)\overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{AC}(\alpha - \gamma + \gamma\alpha) + \overrightarrow{AB}(-\alpha + \gamma) &= \beta\alpha\overrightarrow{AC} + \beta(1-\alpha)\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

De donde concluimos con dos ecuaciones:

$$\beta\alpha = \alpha - \gamma + \gamma\alpha \quad \text{y} \quad \beta(1-\alpha) = \gamma - \alpha$$

De las dos ecuaciones anteriores obtenemos las relaciones entre β, γ en función de α así:

$$\alpha = \alpha, \qquad \beta = \frac{\alpha^2}{1-\alpha+\alpha^2}, \qquad \gamma = \frac{\alpha}{1-\alpha+\alpha^2} \tag{1.23}$$

Situación similar para los triángulos $\triangle CQN$ y $\triangle ARO$, observemos la figura 1.46 donde aparecen las constantes de proporcionalidad, nota: no confundirlas con distancias.

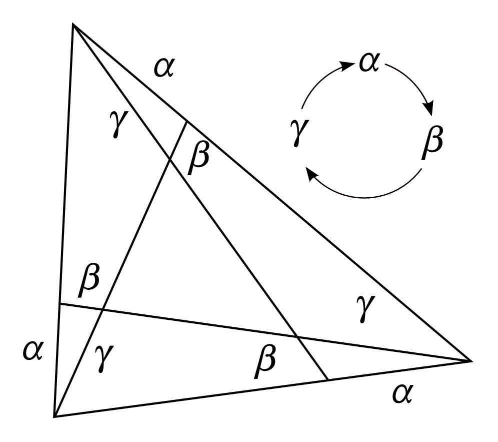


Figura 1.46 Constantes de proporcionalidad

Ahora si al área del triángulo principal le restamos las áreas de los triángulos $\triangle BCN$, $\triangle CAO$ y $\triangle ABM$ obtenemos el área del triángulo $\triangle OMN$ para compararla con el área del triángulo $\triangle ABC$, ver figura 1.47.

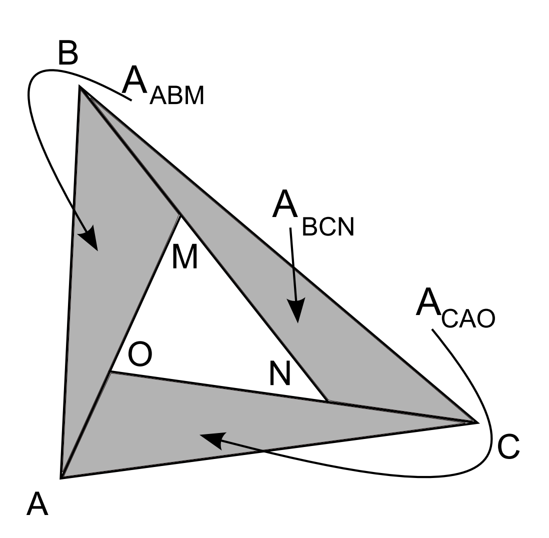


Figura 1.47 Resta de áreas

El área del triángulo $\triangle BCN$ se calculará usando la figura 1.48, de idéntica manera se haría con los triángulos $\triangle CAO$ y $\triangle ABM$.

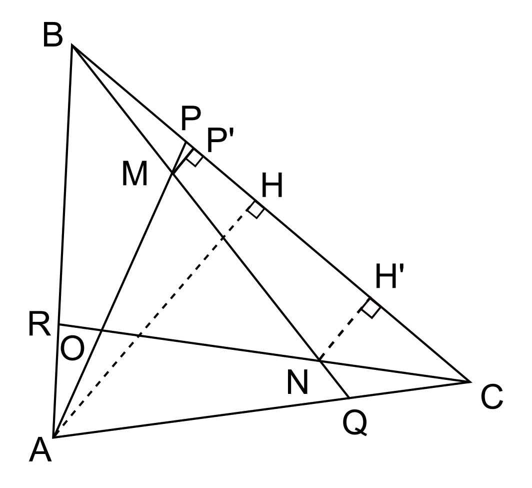


Figura 1.48 Cálculo de áreas

El área del triángulo $\triangle BCN$

$$A_{BCN} = \frac{(BC)(NH')}{2}$$

En la figura 1.48 hay varias semejanzas de triángulos tales como $\triangle HAP$, $\triangle P'MP$; $\triangle H'NB$, $\triangle P'MB$, de donde se obtienen las siguientes semejanzas:

$$\frac{NH'}{MP'} = \frac{NB}{MB}; \quad \frac{AH}{AP} = \frac{MP'}{MP}$$

$$\text{despejando se tiene que } MP' = \frac{(AH)(MP)}{AP}$$

$$NH' = \frac{(AH)(MP)(NB)}{(AP)(MB)} = AH\left[\frac{\beta}{\gamma}(1-\beta)\right]$$

$$NH' = AH\alpha\left[1 - \frac{\alpha^2}{1-\alpha+\alpha^2}\right] = AH\alpha\left[\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha^2}\right]$$

Ahora observemos que la relación de las alturas NH' y AH se transforma en:

$$\frac{NH'}{AH} = \frac{NH'(BC/2)}{AH(BC/2)} = \frac{A_{BCN}}{A_{ABC}} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha+\alpha^2} \tag{1.24}$$

De manera similar se tiene para los otros triángulos con las relaciones:

$$\frac{A_{CAO}}{A_{ABC}} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha+\alpha^2}$$

$$\frac{A_{ABM}}{A_{ABC}} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha+\alpha^2}$$

Esto demuestra que las áreas de los triángulos son congruentes. Si hacemos la relación 1.24 igual a k entonces se expresa que:

$$A_{OMN} = A_{ABC} - 3kA_{ABC} \tag{1.25}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{1 - 3\left[\dfrac{\alpha - \alpha^2}{1 - \alpha + \alpha^2}\right]} A_{OMN} \tag{1.26}$$

Por lo tanto obtenemos que la relación de áreas del triángulo $\triangle OMN$ interno y el original $\triangle ABC$ es:

$$A_{OMN} = \left[\frac{(1 - 2\alpha)^2}{1 - \alpha + \alpha^2}\right] A_{ABC} \tag{1.27}$$

1.4.2 PROBLEMAS

Problema 1.4.1. *Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus respectivos puntos medios.*

Problema 1.4.2. *Demostrar que el polígono que resulta al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero es un paralelogramo. Ver figura 1.49.*

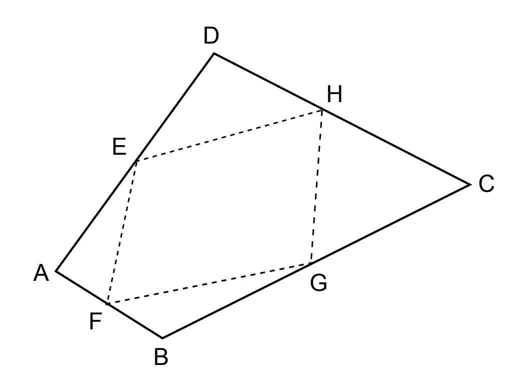


Figura 1.49 Problema: 1.4.2

Problema 1.4.3. *Consideremos dos puntos A, B fijos respecto a cierto origen O, y sean $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, sus respectivos vectores de posición, demuestre que si la ecuación vectorial $a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 = \vec{0}$ es cierta respecto al origen O, entonces también es válida respecto a otro origen O' si y solo si $a_1 + a_2 = 0$, ver la figura 1.50.*

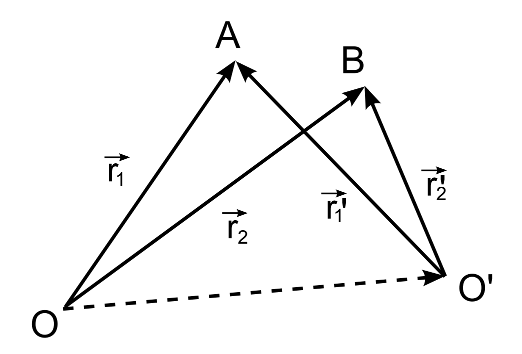


Figura 1.50 Independencia del punto de referencia

Problema 1.4.4. *Demuestre que si en un triángulo cualquiera se inscribe otro triángulo, entonces sólo existirá un triángulo inscrito cuyos lados sean paralelos al triángulo mayor.*

Problema 1.4.5. *Si D es el punto medio del lado AB del triángulo ABC, figura 1.51, y si además $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{CE}$ demuestre que F es el punto medio del segmento $\overline{CD}$.*

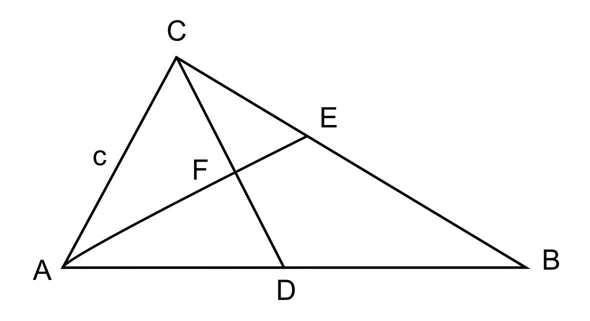


Figura 1.51 Problema 1.4.5

Problema 1.4.6. *En el paralelogramo $ABCD$, H es el punto medio del lado CD, F y G trisecan el lado BC y si $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AE}$, hallar la relación de $\dfrac{|\overrightarrow{EP}|}{|\overrightarrow{PF}|}$. Ver figura 1.52.*

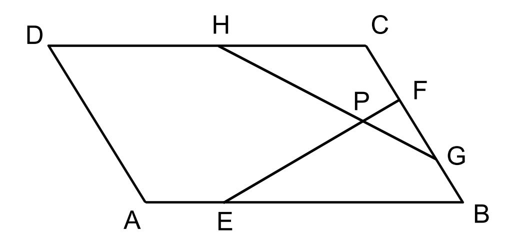


Figura 1.52 Problema 1.4.6

Problema 1.4.7. *En el paralelogramo $ABCD$, M y N son los puntos medios del lado AB y CD, pruebe que DM y BN trisecan la diagonal AC en los puntos X y Y. Ver figura 1.53.*

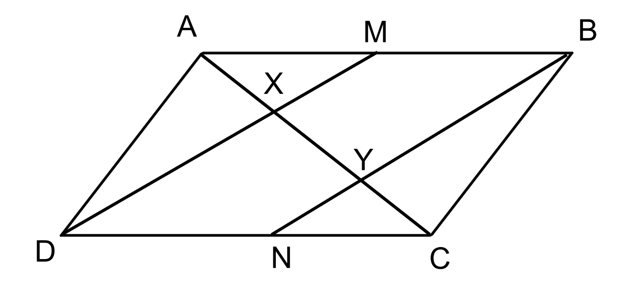


Figura 1.53 Problema 1.4.7

Problema 1.4.8. *Demuestre que el segmento de línea que une un vértice de un paralelogramo a un punto de los lados opuestos que lo divide en la relación de* 1 *a* n *divide la diagonal en la relación de* 1 *a* $n+1$ *o de* n *a* $n+1$.

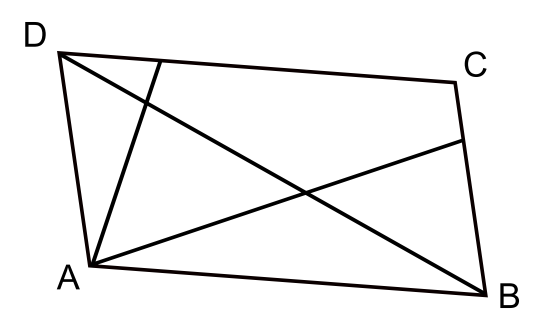


Figura 1.54 Problema 1.4.8

Problema 1.4.9. *Demuestre que los segmentos que parten desde dos vértices de un triángulo y que trisecan los lados opuestos, como se ve en la figura 1.55, se intersecan en el punto* P *tal que se dividen en la relación de* 3 *a* 2.

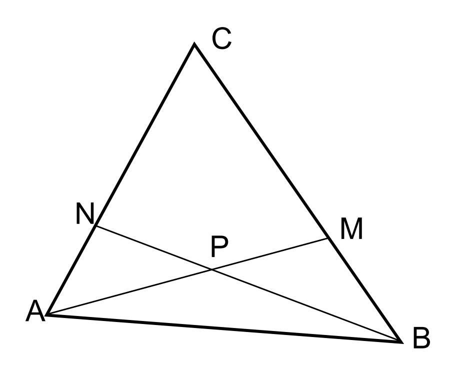


Figura 1.55 Problema 1.4.9

Capítulo 2

PRODUCTO ESCALAR

Si se tienen dos vectores definiremos el producto escalar como la multiplicación de sus respectivos módulos o magnitudes y el coseno del ángulo que forman estos dos vectores; este producto se denomina, también, como producto interno o interior. La figura 2.1 nos ayuda a ilustrar el producto escalar. Es importante resaltar que el producto escalar no es lo mismo que el producto 'por un escalar'.

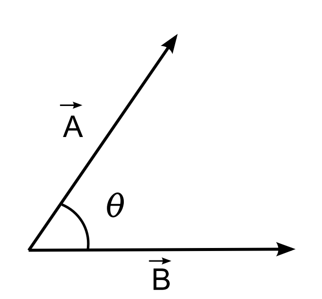


Figura 2.1 Producto escalar

Definimos el producto punto como:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \mid \vec{A} \mid\mid \vec{B} \mid \cos(\theta) \qquad (2.1)$$

Este producto genera un resultado escalar o un número real, el signo del producto depende del signo de $\cos(\theta)$.

Si $\theta < 90^{o} \quad \Longrightarrow \quad \mid \vec{A} \mid\mid \vec{B} \mid > 0$

Si $\theta = 90^{o} \quad \Longrightarrow \quad \mid \vec{A} \mid\mid \vec{B} \mid = 0$

Si $\theta > 90^{o} \quad \Longrightarrow \quad \mid \vec{A} \mid\mid \vec{B} \mid < 0$

Podemos concluir ahora que dos vectores, de magnitudes diferentes de cero, son perpendiculares si su producto interno o escalar es 0.

2.1 PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

- **Positividad:** $\vec{A} \bullet \vec{A} \geq 0$, $\vec{A} \bullet \vec{A} = 0$ sí y sólo si $\vec{A} = 0$
- **Conmutativa:** $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$ También llamada simetría.

- **Producto por escalares:** $p\vec{A}\bullet q\vec{B} = pq\vec{A}\bullet\vec{B}$ Llamada también Homogeneidad.
- **Distributiva:** $\vec{A}\bullet(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\bullet\vec{B} + \vec{A}\bullet\vec{C}$
- **Módulo o magnitud:** $\vec{A}\bullet\vec{A} = \mid \vec{A} \mid^2$; $\sqrt{\vec{A}\bullet\vec{A}} = \mid \vec{A} \mid$

Un símbolo práctico para definir el producto escalar de un vector por sí mismo es utilizando el exponente cuadrático:

Definición 1. $\vec{A}^2 \equiv \vec{A}\bullet\vec{A}$

Es bueno recalcar que $\vec{A}^2 = \mid \vec{A} \mid^2$ y también que $\sqrt{\vec{A}^2} \neq \vec{A}$.

Ejemplo 10.

$$(\vec{A}+\vec{B})^2 = \vec{A}^2 + \vec{B}^2 + 2\vec{A}\bullet\vec{B} \tag{2.2}$$

$$(\vec{A}-\vec{B})^2 = \vec{A}^2 + \vec{B}^2 - 2\vec{A}\bullet\vec{B} \tag{2.3}$$

$$(\vec{A}+\vec{B})\bullet(\vec{A}-\vec{B}) = \vec{A}^2 - \vec{B}^2 \tag{2.4}$$

2.1.1 PROYECCIÓN VECTORIAL Y ESCALAR

En geometría euclidiana la proyección de un punto sobre una recta es el pie del segmento de mínima distancia del punto a la recta. La proyección de un segmento sobre una recta es el segmento limitado por la proyección de los puntos extremos del segmento proyectante.

Si se tienen dos vectores y realizamos el producto escalar, se puede describir, de forma geométrica, dicho producto como la proyección[1] de la magnitud de un vector tantas veces la magnitud del otro, figura 2.2:

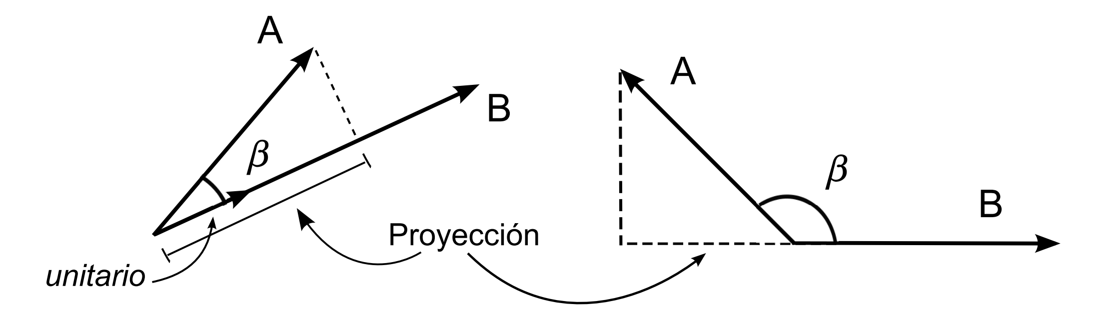


Figura 2.2 Proyección escalar

[1]Normalmente se utiliza el término proyección ortogonal.

Considérese al vector unitario en la orientación del vector $\overrightarrow{B}$. Como $\overrightarrow{u_B} = \dfrac{\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{B}|}$, expresaremos la proyección escalar del vector $\overrightarrow{A}$ sobre el vector $\overrightarrow{B}$ de la siguiente manera: $pr_{u_{\overrightarrow{B}}}(A) = \overrightarrow{u_B}\bullet\overrightarrow{A}$, Algunos autores llaman a esta expresión la componente[2] de $\overrightarrow{A}$ sobre $\overrightarrow{B}$

Otra forma de abordar el concepto es el mostrado por la figura 2.3 así:

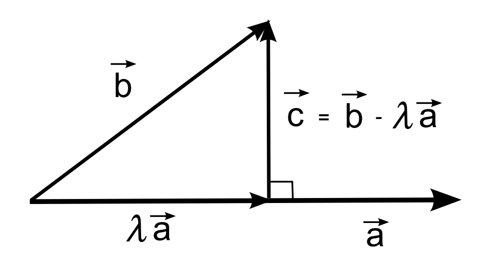


Figura 2.3 Proyección ortogonal

$\overrightarrow{c} + \lambda\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, si multiplicamos escalarmente por $\overrightarrow{a}$, entonces $\lambda\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{a} + 0 = \overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}$
Luego el factor de proyección es:

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}}{\overrightarrow{a}^2} = \frac{\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}}{\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{a}} \tag{2.5}$$

El vector $\lambda\overrightarrow{a}$ es el vector proyección de $\overrightarrow{b}$ sobre el vector $\overrightarrow{a}$. Se ha asumido que el vector $\overrightarrow{c}$ es ortogonal al vector $\overrightarrow{a}$. Podemos decir que un vector es ortogonal a otro vector si el producto punto entre ellos es cero, se asume que los vectores son, cada uno, diferente del vector cero.

2.1.2 TEOREMA DE PITÁGORAS

Teorema 2.1. *En un triángulo rectángulo ABC el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Demostración 2.1. *Sean los catetos $\mid \overrightarrow{a} \mid= a$, $\mid \overrightarrow{b} \mid= b$, y la hipotenusa $\mid \overrightarrow{c} \mid= c$*

$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{c}^2 = \overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + 2\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}$ aplicando la ecuación 2.2, pero los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son perpendiculares entre sí, entonces la expresión se reduce a $\overrightarrow{c}^2 = \overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2$; si $|\overrightarrow{c}| = c$, $|\overrightarrow{a}| = a$, $|\overrightarrow{b}| = b$, se concluye que $c^2 = a^2 + b^2$.

[2]En Física.

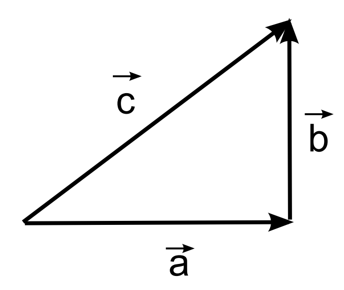


Figura 2.4 Teorema de Pitágoras

2.1.3 PROBLEMA DE STEWART

Sea el triángulo ABC de lados a, b, c y el punto O en el lado a. Si existe una ceviana (segmento de un vértice a un lado opuesto a ella) tal que llegue al punto O dividiendo el lado en dos segmentos n, m, figura 2.5, se puede obtener la magnitud del segmento o ceviana desconocida mediante la ecuación:

$$\boxed{ap^2 = mb^2 + nc^2 - mna} \tag{2.6}$$

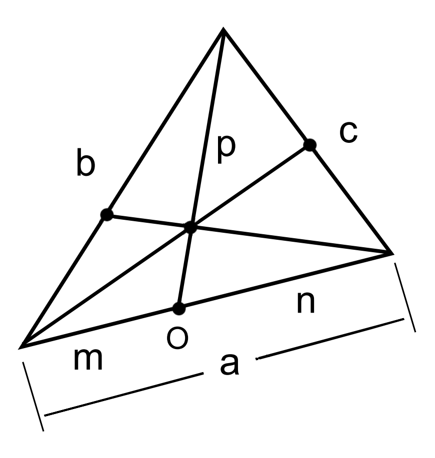


Figura 2.5 Teorema de Stewart

Si aplicamos las ecuaciones del aparte o sección 1.4 podemos escribir;

$$\vec{p} = \frac{m\vec{b} + n\vec{c}}{a}$$

Si tomamos la magnitud para la ecuación anterior se obtiene, ver figura 2.6

$$p^2 = \frac{1}{a^2}\left(b^2m^2 + c^2n^2 + 2mn\,\vec{b}\bullet\vec{c}\right) \tag{2.7}$$

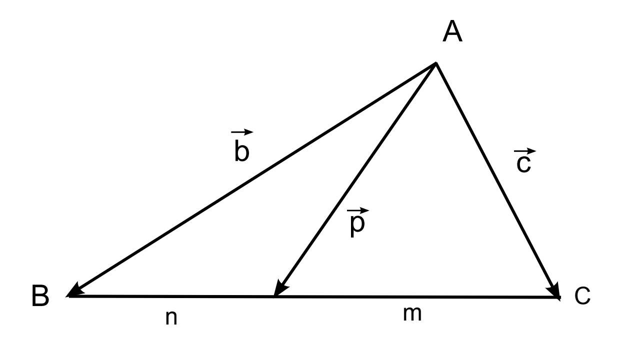


Figura 2.6 Teorema de Stewart, demostración

Como $\vec{b} \bullet \vec{c} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$, al reemplazar en 2.7 llegamos al resultado esperado y definido por la ecuación 2.6.

2.2 PROBLEMAS

Problema 2.2.1. *Calcular las longitudes de las medianas de un triángulo.*

Problema 2.2.2. *Calcular las longitudes de las bisectrices de un triángulo.*

Problema 2.2.3. *Calcular las longitudes de las alturas de un triángulo.*

Problema 2.2.4. *Presentar el teorema del coseno de manera vectorial, utilizando el producto escalar, despeje el ángulo de su resultado.*

Problema 2.2.5. *Demuestre que la diagonal de un rombo es bisectriz.*

Problema 2.2.6. *¿Cuándo las diagonales de un paralelogramo son ortogonales?.*

Problema 2.2.7. *Probar que* $| \vec{a} \bullet \vec{b} | \leq | \vec{a} || \vec{b} |$ *(Desigualdad Cauchy-Schwarz)*

Problema 2.2.8. *Demostrar que los vectores* $|\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}$ *y el vector* $|\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}$ *son perpendiculares.*

Problema 2.2.9. *Hallar el ángulo formado por dos diagonales de un cubo.*

Problema 2.2.10. *Demostrar que un ángulo inscrito* $(\angle ACB)$ *en una semicircunferencia es recto, ver figura 2.7.*

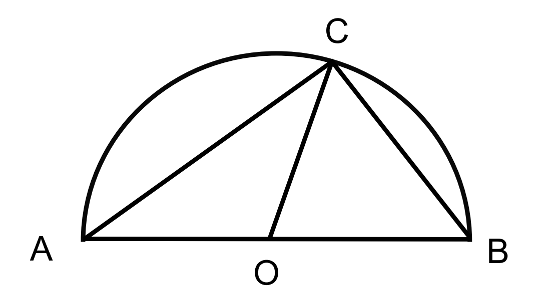


Figura 2.7 Problema: 2.2.10

Problema 2.2.11. *Sean* $\overrightarrow{a}$ *y* $\overrightarrow{b}$ *dos vectores linealmente independientes, probar que el vector* $\dfrac{|\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|}$ *tiene la dirección de la bisectriz del ángulo formado por* $\overrightarrow{a}$ *y* $\overrightarrow{b}$.

Problema 2.2.12. *Demostrar que las alturas de un triángulo cualquiera son concurrentes.*

Problema 2.2.13. *Demostrar vectorialmente que los segmentos desde los pies de dos alturas en un triángulo al punto medio del otro lado restante son iguales.*

Problema 2.2.14. *Demostrar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus cuatro lados.*

Problema 2.2.15. *En un triángulo cualquiera* ABC *si* AD *es la mediana del lado* BC*, entonces demostrar que* $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2$*, ver figura 2.8.*

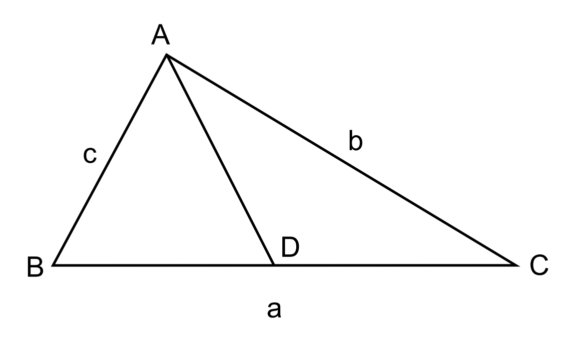


Figura 2.8 Problema: 2.2.15

Capítulo 3

VECTORES EN COORDENADAS

3.1 VECTORES EN $\mathbb{R}^2$

Cuando utilizamos un plano de coordenadas cartesianas, se ubica un punto cualquiera (a, b), y estos puntos, abscisa y ordenada respectivamente, pueden definir un segmento que parte del origen $(0, 0)$ hasta (a, b) que llamaremos vector. Los números a y b se llaman componentes de un vector y recordaremos que $a, b \in \mathbb{R}$, pero la dupla $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. El segmento tiene por lo tanto su magnitud y su dirección definidos por: $\sqrt{a^2 + b^2}$ y el ángulo entre el segmento y el eje de las abscisas es $\theta = \arctan(b/a)$, que nos define la dirección, donde $a \neq 0$, si $a = 0$ decimos que su dirección es de $90°$ respecto al eje de las x, si $a = 0$ y $b = 0$ tenemos el vector cero $\overrightarrow{0}$.

La magnitud se expresa también como $||\overrightarrow{A}||$ esta doble barra y la barra sencilla se confunde con el valor absoluto, observemos que: $||\alpha\overrightarrow{A}|| = |\alpha|||\overrightarrow{A}||$ donde aparece primero el valor absoluto y luego la magnitud. Veamos la figura 3.1.

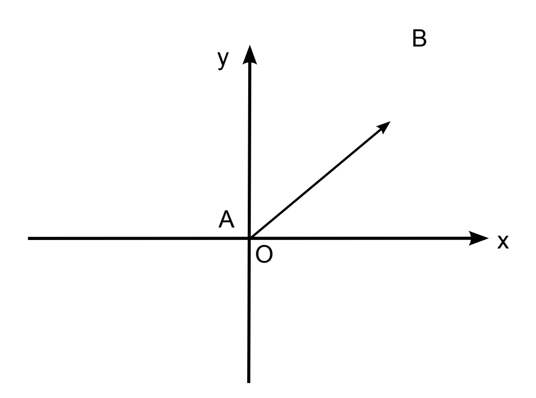


Figura 3.1 Vector referenciado a coordenadas

Si en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ definimos dos vectores básicos que sean linealmente independientes, ver temas 1.3, uno será $\vec{\imath} = (1,0)$ y el otro $\vec{\jmath} = (0,1)$ entonces tenemos las siguientes propiedades:

3.1.1 PROPIEDADES

- **1:** $\vec{P} = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1) = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$
- **2:** $\vec{\imath}\bullet\vec{\jmath} = \vec{\jmath}\bullet\vec{\imath} = 0.$ Ortogonalidad
- **3:** $\vec{Q} = (x,y)$ y si $\vec{Q} = \vec{P}$, entonces $(x,y) = (a,b)$ implica que a $x = a$, y $y = b$.
- **4:** $\vec{Q} = (x,y)$ entonces $k\vec{Q} = k(x,y) = (kx,ky)$. Escalamiento.
- **5:** $\vec{P}\bullet\vec{Q} = (a,b)\bullet(x,y) = ax + by.$ Producto punto o escalar.
- **6:** $\vec{Q}\bullet\vec{Q} = (x,y)\bullet(x,y) = x^2 + y^2.$ $\vec{Q}^2 = |\vec{Q}|^2.$

El vector $\vec{P} = (p_1, p_2)$ se suma algebraicamente a otro vector así: Si $\vec{A} = (a_1, a_2)$ se tiene que:

$$\vec{A} + \vec{P} = (a_1, a_2) + (p_1, p_2) = (a_1 + p_1, a_2 + p_2)$$

OTRA NOTACIÓN POR COMPONENTES

Existe otra notación para los vectores. El vector $\vec{V} = (a,b)$ también se puede expresar como $\vec{V} = \langle a,b\rangle$ este tipo de paréntesis es usual en otros autores, más adelante lo utilizaremos, también se emplea la notación $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Recordemos que se debe ser coherente o consistente en la notación cuando se desarrolla un tema; no mezclar notaciones o simbología para un mismo objeto matemático.

Veamos el siguiente ejemplo:

Si $\vec{M} = (3t, 5t^2)$ y $\vec{N} = (2/3, -8)$, hallar $\vec{M}\bullet\vec{N}$

Solución

$\vec{M}\bullet\vec{N} = \langle 3t, 5t^2\rangle\bullet\langle 2/3, -8\rangle = 2t - 40t^2$ En este ejemplo se han mezclado notaciones en los paréntesis, a pesar de que la solución es correcta.

Lo mejor es enunciarlo así:

Si $\overrightarrow{M} = \langle 3t, 5t^2 \rangle$ y $\overrightarrow{N} = \langle 2/3, -8 \rangle$, hallar $\overrightarrow{M} \bullet \overrightarrow{N}$

3.1.2 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Se define la distancia entre estos dos puntos como la magnitud del segmento P_1P_2, así:

$$P_1P_2 = |(x_2 - x_1)\overrightarrow{\imath} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{\jmath}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

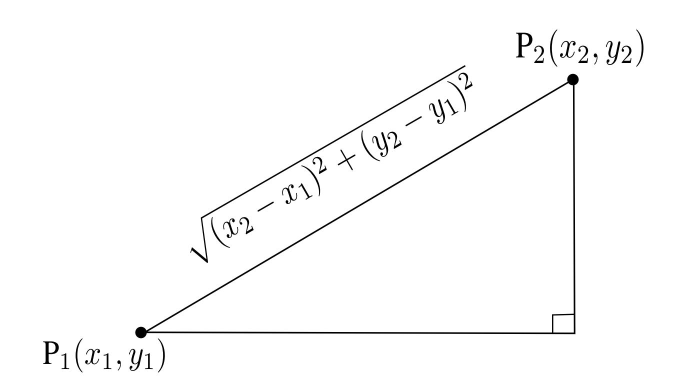


Figura 3.2 Distancia entre dos puntos

3.1.3 FORMA SIMÉTRICA DE UN VECTOR EN COORDENADAS

Dadas las coordenadas de dos puntos que definen un segmento, buscaremos las coordenadas de otro punto que divida este segmento en la relación m/n.

El punto $A(x_a, y_a)$ y $B(x_b, y_b)$, son los extremos del segmento $\overline{AB}$. El punto que separa los dos segmentos se denota por $P(x, y)$, aplicando la ecuación 1.5 tenemos que

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} = \frac{m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}}{m+n} = \frac{m(x_b\overrightarrow{\imath} + y_b\overrightarrow{\jmath}) + n(x_a\overrightarrow{\imath} + y_a\overrightarrow{\jmath})}{m+n}$$

Por lo tanto se tiene que $\quad x = \dfrac{mx_b + nx_a}{n+m}; \quad y = \dfrac{my_b + ny_a}{n+m}$ Si en el segmento $\overline{AB}$ tomamos un punto fuera del segmento (No entre los puntos A y B) pero colineal al segmento la ecuación de relación tomaría la forma siguiente:

$$x = \frac{-mx_b + nx_a}{n-m} \tag{3.1}$$

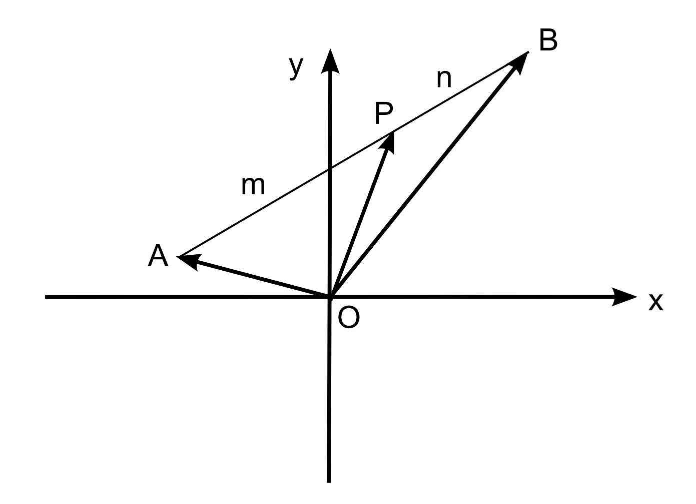


Figura 3.3 Relación de segmentos m:n

$$y = \frac{-my_b + ny_a}{n - m} \tag{3.2}$$

Ver la figura 3.4.

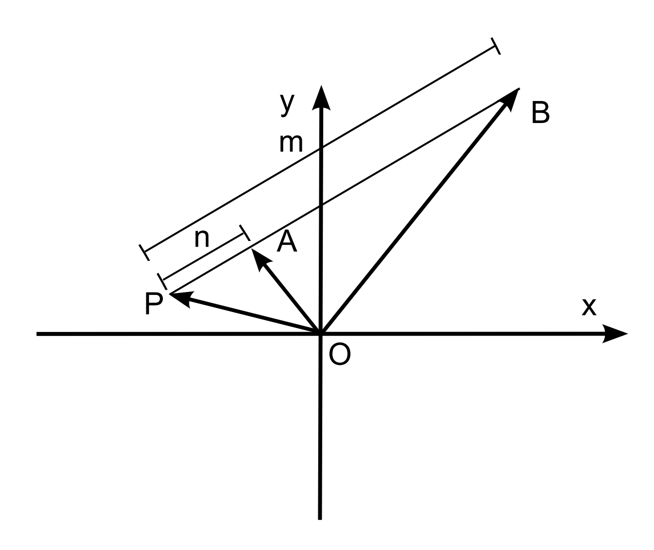


Figura 3.4 Punto externo a $\overline{AB}$

3.2 VECTORES EN $\mathbb{R}^3$

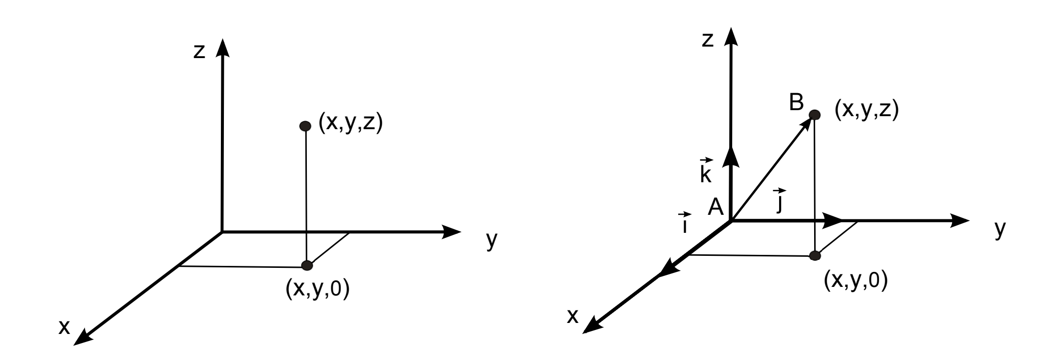


Figura 3.5 Espacio 3D

Si tomamos un sistema trirectangular, o sea tal que tres rectas sean perpendiculares entre sí, como se muestra en la figura 3.5, se puede ubicar un vector que salga de un punto A hasta un punto B, este vector se puede redefinir en coordenadas (x, y, z). En una de las figuras que se tiene en 3.5 aparece un nuevo vector unitario sobre el eje de las z, este vector es $\overrightarrow{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$, los otros dos vectores se definen en tres dimensiones así: $\overrightarrow{\imath} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ que continúa en el eje de las x y el vector unitario $\overrightarrow{\jmath} = \langle 0, 1, 0 \rangle$; para otros autores es común utilizar la simbología de $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$.

Si ubicamos un vector desde el punto $A(1, 2, 3)$ hasta el punto $B(4, 5, 8)$, este vector se puede trasladar, sin modificar su dirección, hasta el punto $(0, 0, 0)$ y colocar allí el origen del vector. Veamos la figura 3.6:

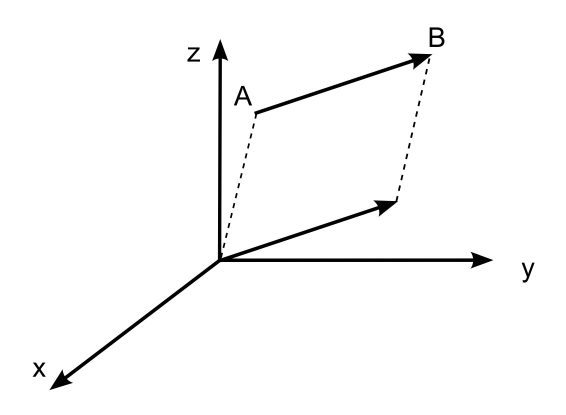


Figura 3.6 Desplazamiento de vector

3.2.1 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN $\mathbb{R}^3$

Sean los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, figura 3.7, se define la distancia entre estos dos puntos como la magnitud del segmento P_1P_2, así:

$$P_1P_2 = |(x_2 - x_1)\overrightarrow{\imath} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{\jmath} + (z_2 - z_1)\overrightarrow{k}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Si tenemos dos vectores como $\overrightarrow{A} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ y el vector $\overrightarrow{B} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$ y si realizamos

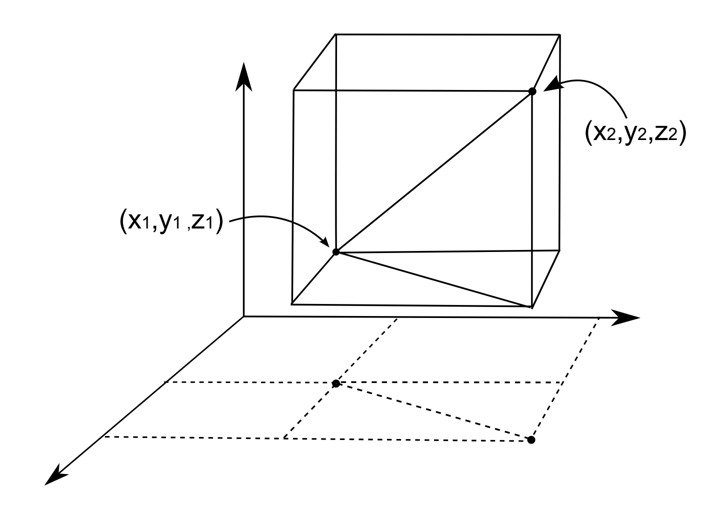


Figura 3.7 Distancia entre dos puntos

el producto escalar entre ellos se llega a: $\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Para la magnitud del vector $\overrightarrow{A}$ en 3D tendríamos lo siguiente: $|\overrightarrow{A}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

Ejemplo 11. *Demostrar que el producto punto entre dos vectores $\overrightarrow{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\overrightarrow{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, diferentes de cero, es igual a:*

$$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 \tag{3.3}$$

En la figura 3.8 que representa la diferencia entre dos vectores, si aplicamos la ley del coseno al triángulo allí definido, entonces tenemos que:

$$|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 - 2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\theta) \tag{3.4}$$

Siendo θ el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$. Sabemos por la ecuación 2.1 que el producto punto es:

$$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\theta) = \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}$$

Si despejamos $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}$ de 3.4 llegamos a:

$$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 - |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|^2\right) \tag{3.5}$$

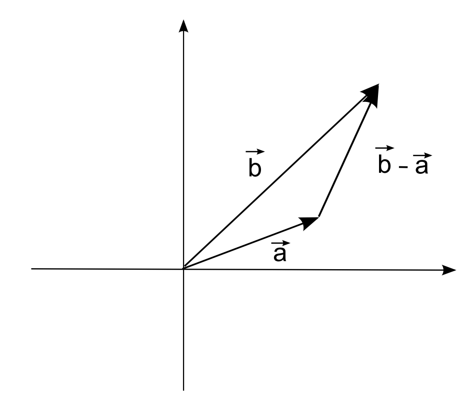


Figura 3.8 Producto punto en coordenadas

Ahora como $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$ y $|\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$, para $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$ que llevando a la expresión 3.5 tenemos:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \bullet \vec{b} &= \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2\right) \\
\vec{a} \bullet \vec{b} &= \frac{1}{2}(2a_1b_1 + 2a_2b_2) = a_1b_1 + a_2b_2 \\
\vec{a} \bullet \vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 12. *Dado un vector de magnitud constante cuyo origen es el punto de coordenadas (x_1, y_1, z_1) y si su extremo tiene coordenadas cualesquiera (x, y, z), entonces este extremo define la superficie de una esfera.*

Tenemos que $\vec{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$ es un vector que ubica el punto centro de la esfera, este vector parte del origen $(0, 0, 0)$. Otro vector, que también parte del origen, $\vec{r} = (x, y, z)$, entonces podemos hallar la diferencia entre estos para obtener: $\vec{r} - \vec{r_1}$, esta diferencia será el radio vector de nuestra esfera a obtener. Ver figura 3.9.

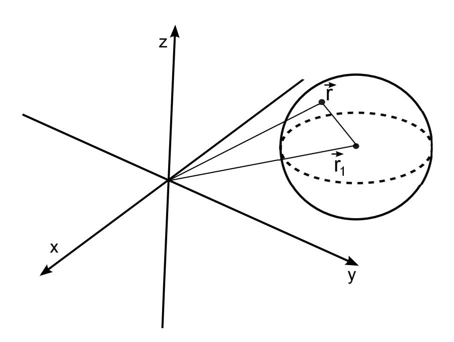


Figura 3.9 Esfera.

Como la diferencia o el radio es constante se llega a:

$$
\begin{aligned}
|\ \vec{r} - \vec{r_1}\ | &= k \\
|\ \vec{r} - \vec{r_1}\ |^2 &= (\vec{r} - \vec{r_1})\bullet(\vec{r} - \vec{r_1}) \\
k^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2
\end{aligned}
$$

que corresponde a la ecuación de una esfera en 3D.

Ejemplo 13. *Hallar los cosenos directores que corresponden al vector:*

$$\vec{P} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$$

Los cosenos directores de un vector o un segmento son los cosenos de los ángulos formados por el vector o segmento y cada uno de los ejes cartesianos en 2D o en 3D. Si estos ángulos son α que corresponde al eje de las x, β con el eje de las y y γ con el eje de las z.

Se tiene por lo tanto que $\vec{P}\bullet\vec{\imath} =|\ \vec{P}\ |\cos(\alpha) = a$ se concluye que:

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{3.6}$$

De manera idéntica se tiene para los otros ángulos:

$$\cos(\beta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{3.7}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{3.8}$$

Con las expresiones anteriores se demuestra la identidad clásica para los cosenos directores de un línea o un vector:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1 \tag{3.9}$$

Ejemplo 14. *Determinar una expresión para el ángulo entre dos vectores no nulos.*

Si tenemos los vectores $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y el vector $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$, si realizamos el producto escalar entre los dos vectores se llega a:

$$\vec{A}\bullet\vec{B} =|\ \vec{A}\ ||\ \vec{B}\ |\cos(\theta) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Si despejamos de estas ecuaciones el ángulo entre vectores finalizamos con:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\right) = \cos^{-1}\frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \tag{3.10}$$

3.3 PROBLEMAS

Problema 3.3.1. *Hallar el vector resultante de la suma de* $\overrightarrow{A} + 3\overrightarrow{B} - 2\overrightarrow{C}$*, si se tiene que* $\overrightarrow{A} = \langle 1, -2\rangle$*,* $\overrightarrow{B} = \langle 4, -3\rangle$*,* $\overrightarrow{c} = \langle 10, -5\rangle$*.*

Problema 3.3.2. *Hallar* $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{A} + t\overrightarrow{B}$ *si* $\overrightarrow{A} = \langle 2, -3\rangle$*,* $\overrightarrow{B} = \langle 4, -3\rangle$ *cuando* $t = 1, 3, -7$

Problema 3.3.3. *Determinar el valor de* x *si se tienen los vectores siguientes y sus relaciones:*
$\langle -1, 5\rangle = 2\langle x, 7\rangle + \langle x^2, -2\rangle$

Problema 3.3.4. *Si* $\overrightarrow{A} = \langle 1, 1, 1\rangle$*,* $\overrightarrow{B} = \langle 0, 1, 1\rangle$ *y* $\overrightarrow{C} = \langle 2, 2, 1\rangle$ *cuando*
$\overrightarrow{D} = x\overrightarrow{A} + y\overrightarrow{B} + z\overrightarrow{C}$*, hallar los valores de* x, y, z *cuando* $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{0}$

Problema 3.3.5. *Hallar el vector unitario en la dirección del vector* $2\overrightarrow{\imath} + 10\overrightarrow{\jmath} - 3\overrightarrow{k}$*.*

Problema 3.3.6. *Hallar un vector unitario con la misma dirección del vector*
$a\overrightarrow{\imath} + \sqrt{b}\overrightarrow{\jmath} + c\overrightarrow{k}$*.*

Problema 3.3.7. *Encontrar dos vectores de magnitud 5, en el plano* XY*, perpendiculares al vector* $4\overrightarrow{\imath} - 3\overrightarrow{\jmath}$*.*

Problema 3.3.8. *Buscar el significado geométrico de la desigualdad*

$$|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}| \leq |\overrightarrow{A}| + |\overrightarrow{B}|$$

Problema 3.3.9. *Buscar los vectores paralelos a* $\overrightarrow{a} = \langle 1, 3\rangle$ $\overrightarrow{b} = \langle 2, 5\rangle$*, tal que dichos vectores tengan magnitud 1.*

Problema 3.3.10. *Buscar los vectores perpendiculares a* $\overrightarrow{a} = \langle 1, 3\rangle$ $\overrightarrow{b} = \langle 2, 5\rangle$*, tal que dichos vectores tengan magnitud 1.*

Problema 3.3.11. *Si el vector* $\overrightarrow{a} = \langle 2, 3\rangle$ *y el vector* $\overrightarrow{b} = \langle 4, 1\rangle$*, hallar la proyección del vector* $\overrightarrow{a}$ *sobre el vector* $\overrightarrow{b}$ *y la proyección del vector* $\overrightarrow{b}$ *sobre el vector* $\overrightarrow{a}$*.*

Problema 3.3.12. *Hallar los cosenos directores de los siguientes vectores respecto a los tres ejes cartesianos.*

1. $\overrightarrow{P} = \langle 2, -5, 4\rangle$
2. $\overrightarrow{Q} = \langle -1, 1, 3\rangle$
3. $\overrightarrow{R} = \langle 3, 4, 5\rangle$

Problema 3.3.13. *Hallar los ángulos del triángulo* ABC *si los vértices tienen coordenadas así:* $A(1, 2, 3)$*,* $B(-1, -2, -3)$ *y* $C(0, 0, 0)$*.*

Problema 3.3.14. *Probar que los vectores* $\langle \cos\theta, -\operatorname{sen}\theta\rangle$ *y* $\langle \operatorname{sen}\theta, \cos\theta\rangle$ *son perpendiculares.*

3.4 DETERMINANTES

Se define el determinate D de orden 2×2 a la expresión:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Los términos a_1, a_2, b_2, b_1 se llaman elementos del determinante

Si el orden de D es de 3×3 su definición es:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Los determinantes son, por lo tanto, arreglos ordenados en cantidades iguales tanto en filas como en columnas.
También se utiliza el símbolo Δ para denotar un determinante.

3.4.1 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Un elemento de un determinante se identifica con dos subíndices, i, j para el elemento a_{ij}. El subíndice i se refiere a las filas y j a las columnas.

1. Si todos los elementos de una fila o una columna se multiplican por una constante k entonces el determinante queda multiplicado por k.

$$k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. El intercambio de filas por columnas no afecta el valor del determinante.

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{31}} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Si se intercambian dos filas o dos dos columnas el signo del determinante cambia

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

4. Si el determinante tiene dos filas o dos columnas iguales el valor es cero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

   Si, por ejemplo tenemos que $a_{11} = a_{12} = a_{13}$

5. Si cada elemento de una fila se multiplica por una constante, k por ejemplo, este resultado se le puede agregar a cada elemento respectivo en otra fila sin que el valor del determinante cambie, similar sucede con las columnas.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6. Si cada elemento de una fila o columna se compone de dos sumandos, entonces se puede expresar el determinante como la suma de dos determinantes donde cada uno de ellos se compone de una columna o fila por cada sumando:

$$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 \\ b_1+y & b_2 & b_3 \\ c_1+z & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 \\ y & b_2 & b_3 \\ z & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{3.11}$$

3.4.2 EJEMPLOS

Ejemplo 15. *Demuestre que el determinante (3.12) es igual a* $(a-b)(a-c)(c-b)$

$$\begin{vmatrix} 1 & ab & a+b \\ 1 & bc & b+c \\ 1 & ca & c+a \end{vmatrix} \tag{3.12}$$

Multiplicamos la fila $\#1$ *por -1 y la sumamos a la fila* $\#2$ *para obtener (3.13):*

$$\begin{vmatrix} 1 & ab & a+b \\ 0 & bc-ab & -a+c \\ 1 & ca & c+a \end{vmatrix} \tag{3.13}$$

Otra vez multiplicamos la fila $\#1$ por -1 y la sumamos a la fila $\#3$ y llegamos a (3.14)

$$\begin{vmatrix} 1 & ab & a+b \\ 0 & bc-ab & -a+c \\ 0 & ca-ab & c-b \end{vmatrix} \tag{3.14}$$

Este determinante se reduce a un nuevo determinante (3.15), el cofactor del elemento a_{11} de (3.14), que se define como dejar un determinante eliminando la fila y columna correspondiente al elemento y asignándole el signo dada la posición según la regla de $(-1)^{i+j}$, este nuevo determinante tiene un orden uno menos que el original.

$$\begin{vmatrix} bc-ab & -a+c \\ ca-ab & c-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b\,(-a+c) & -a+c \\ a\,(c-b) & c-b \end{vmatrix} \tag{3.15}$$

Ahora factorizando los términos comunes en las filas se obtiene:

$$(c-b)\,(c-a) \begin{vmatrix} b & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = (c-b)\,(c-a)\,(b-a) \tag{3.16}$$

En los pasos anteriores se han aplicado las propiedades de los determinantes, se le pide al lector identificarlas.

Ejemplo 16. *Dado el determinante siguiente, resolverlo aplicando las propiedades:*

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 101 & 102 & 103 \\ 102 & 103 & 104 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

En este ejemplo hemos aplicado la propiedad 5 tanto para la fila #1 como la #2 para llegar al determinante que contienen dos fila idénticas en donde aplicamos la propiedad 4.

Ejemplo 17. *Factorice el siguiente determinante:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$$

Sumamos tanto la fila #2 como la fila #3 a la fila #1, luego factorizamos aplicando la propiedad 1 entonces se obtiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+2\,a & x+2\,a & x+2\,a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x+2a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$$

Ahora restamos a la columna #2 la columna #1 y a la columna #3 le restamos la columna#1 llegamos a:

$$\Delta = (x+2a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & x-a & 0 \\ a & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+2a)(x-a)^2$$

3.4.3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES

Existen varios métodos para solucionar sistemas sencillos de ecuaciones lineales, se presentara el método por determinantes: sean las ecuaciones

$$Ax + By = C \quad (3.17)$$

$$Dx + Ey = F \quad (3.18)$$

La solución de las incógnitas x, y se expresan usando los determinantes en las siguientes expresiones:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C & B \\ F & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}} \quad \text{y para la otra incógnita} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A & C \\ D & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}} \quad (3.19)$$

Observemos que:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} \neq 0$$

Las expresiones anteriores se generalizan por ecuaciones de más incógnitas llegando a lo que se llama el Teorema de Cramer o regla de Cramer; para el caso de tres incógnitas su solución será:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= j \\ dx + ey + fz &= k \\ gx + hy + iz &= l \end{aligned} \tag{3.20}$$

La solución para el sistema de ecuaciones lineales en 3.20 es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\text{Siempre y cuando} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$$

3.5 PROBLEMAS

Problema 3.5.1. *Calcular los siguientes determinantes:*

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix} \qquad c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 8 & 12 \end{vmatrix} \qquad d) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & -5 & 4 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

Problema 3.5.2. *Dado el siguiente determinante hallar los elementos dados.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & -5 & 4 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} \qquad a_{11} = ____, \; a_{23} = ____, \; a_{21} = ____, \; a_{33} = ____.$$

Problema 3.5.3. *Probar que, aunque no importa el valor de x, y, z el determinante siguiente es:*

$$\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Problema 3.5.4. *Demostrar que:*

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Problema 3.5.5. *En geometría analítica se tiene que un triángulo cuyos vértices se encuentran en los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3); el área del triángulo queda determinada por el valor absoluto del siguiente determinante:*

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Calcular el área de un triángulo cuyos vértices se encuentran en $(1, 3)$, $(-2, -3)$, $(-3, 5)$

Problema 3.5.6. *Comprobar que:*

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$$

Problema 3.5.7. *Resolver el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} -1 & x & -1 \\ x & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Problema 3.5.8. *Hallar el valor de λ en el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

Problema 3.5.9. *Demuestre que*

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d+1 \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

Problema 3.5.10. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando la regla de Cramer:*

1. $x+2y+3z=5, \quad 2x-y+4z=11, \quad -y+z=3$
2. $x+y+2z=4, \quad 3x-y-z=2, \quad 2x+5y+3z=3$
3. $x+y=5, \quad x+z=2 \quad y+z=5$

Problema 3.5.11. *Demuestre que el determinante D es igual a cero:*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & b+c & b\left(b^2+c^2\right)+c\left(b^2+c^2\right) \\ 1 & c+a & c\left(c^2+a^2\right)+a\left(c^2+a^2\right) \\ 1 & a+b & a\left(a^2+b^2\right)+b\left(a^2+b^2\right) \end{vmatrix}$$

Capítulo 4

PRODUCTO VECTORIAL

4.1 PRODUCTO CRUZ

El producto cruz es una operación binaria entre dos vectores que da como resultado un tercer vector en el espacio. Si se tiene dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, en $\mathbb{R}^3$, se expresa el producto cruz por la siguiente ecuación:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\,\vec{\imath} - (u_1v_3 - u_3v_1)\,\vec{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\vec{k} \tag{4.1}$$

Esta expresión se puede escribir de forma abreviada como:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

Siendo los vectores $\quad \vec{u} = u_1\,\vec{\imath} + u_2\,\vec{\jmath} + u_3\,\vec{k}, \qquad \vec{v} = v_1\,\vec{\imath} + v_2\,\vec{\jmath} + v_3\,\vec{k}$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, expresados por componentes son:

$$\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

$$\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

El vector resultante es perpendicular al plano que contiene los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ver la figura 4.1.

4.1.1 REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO CRUZ

La aplicación de la regla de mano derecha se describe como el sentido del dedo pulgar igual a $\vec{k}$ mientras que el arco de los otros dedos señalan el giro del vector $\vec{\imath}$ hacia el vector $\vec{\jmath}$.

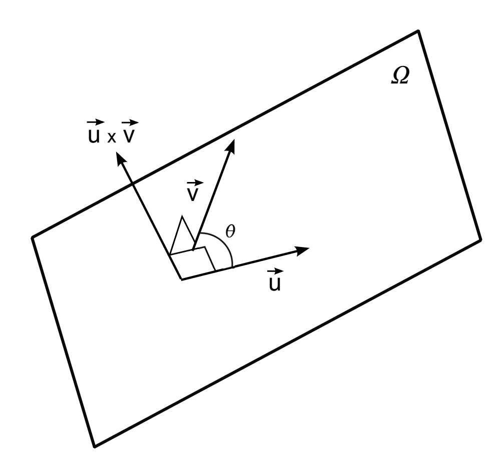


Figura 4.1 Producto cruz

Si los dos vectores están en un plano, el vector resultante se observa en la figura 4.1. Utilizando los vectores unitarios en dirección de los ejes principales del espacio cartesiano se expande el producto cruz como:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \tag{4.3}$$

4.1.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA MAGNITUD DEL PRODUCTO CRUZ

El producto cruz en su magnitud determina el área de un paralelogramo formado por los dos vectores del producto y el ángulo entre ellos, ver figura 4.2. Definimos la magnitud del producto cruz por:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}(\theta) \tag{4.4}$$

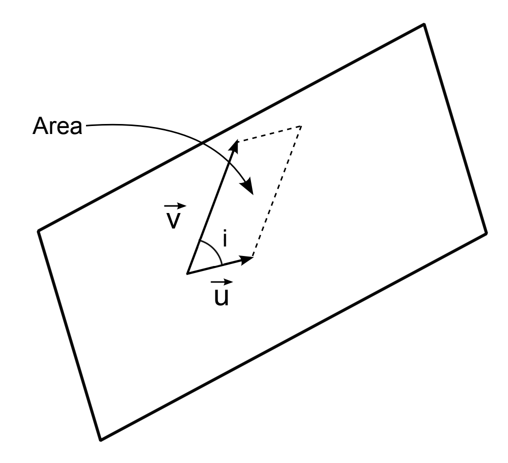


Figura 4.2 Área de un paralelogramo

Una de las interpretaciones físicas del producto cruz es la rotación de objetos tales como el torque y el momento angular.

Ejemplo 18. *Calcular el producto cruz de los vectores* $\vec{a} = \langle 1, 2, 3\rangle$ *y* $\vec{b} = \langle -4, -2, 3\rangle$

Solución

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \langle 12, -15, 6\rangle \tag{4.5}$$

Ejemplo 19. *Hallar el área de un triángulo cuyos vértices están en los puntos* $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, -1)$, $C(2, 1, 2)$

Solución Se busca inicialmente los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \langle (2-1), (3-2), (-1-1)\rangle = \langle 1, 1, -2\rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle (2-1), (1-2), (2-1)\rangle = \langle 1, -1, 1\rangle$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \langle -1, -3, -2\rangle$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\langle -1, -3, -2\rangle| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

Por lo tanto el área del triángulo será la mitad del área del paralelogramo definido por estos dos vectores: área= $\frac{1}{2}\sqrt{14}$

4.1.3 PROPIEDADES DEL PRODUCTO CRUZ

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ Simetría o anticonmutativa

2. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ Paralelismo

3. $\vec{u} \times k\vec{v} = k\vec{u} \times \vec{v}$

4. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ Ley Distributiva

5. $\mid \vec{A} \times \vec{B} \mid^2 = \mid \vec{A} \mid^2 \mid \vec{B} \mid^2 - (\vec{A} \bullet \vec{B})^2$ Identidad de Lagrange

6. $\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \bullet \vec{C}$

7. $\vec{A} \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ y $\vec{B} \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ Ortogonalidad respecto a $\vec{A}$ y $\vec{B}$

8. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \bullet \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \bullet \vec{B})\vec{C}$

9. $\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

10. $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$

11. $\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$

12. $\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$

Ejemplo 20. *Demostrar la propiedad numeral 7 del producto cruz*

Demostración: Sea el vector $\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ Entonces:

$$\begin{aligned}
\vec{A} \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \bullet \langle a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle \\
\vec{A} \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) &= a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
\vec{A} \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) &= a_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 a_1 + a_2 a_3 b_1 - a_1 b_3 a_2 + a_3 a_1 b_2 - a_2 b_1 a_3 = 0
\end{aligned}$$

Si dos vectores son paralelos el producto cruz entre ellos es el vector cero.

$$\vec{U} \times \vec{V} = \vec{0} \qquad \text{Si son paralelos} \tag{4.6}$$

Esto lo podemos interpretar como dependencia lineal, es decir que el vector $\vec{U}$ y $\vec{V}$ son linealmente dependientes. Cuando se tienen tres vectores se puede realizar la operación llamada producto mixto o producto triple escalar, se define así:

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{4.7}$$

Este resultado es geométricamente el volumen de un paralelepípedo.

Demostración: Tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \langle u_1, u_2, u_3\rangle\\ \vec{v} &= \langle v_1, v_2, v_3\rangle\\ \vec{w} &= \langle w_1, w_2, w_3\rangle\end{aligned}$$

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{u}\bullet\left(\vec{\imath}\begin{vmatrix} v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} v_1 & v_3\\ w_1 & w_3\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix}\right)$$

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w}) = u_1\begin{vmatrix} v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} v_1 & v_3\\ w_1 & w_3\end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix} v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix}$$

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix} \tag{4.8}$$

Con el producto triple escalar se sabe si tres vectores son coplanares o pertenecen a un mismo plano. Si tres vectores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ pertenecen un mismo plano entonces:

$$\vec{A}\bullet(\vec{B}\times\vec{C}) = 0 \tag{4.9}$$

Ejemplo 21. *Calcular el volumen de un paralelepípedo definido por los tres vectores:* $\vec{a} = \langle 1, 1, 0\rangle$, $\vec{b} = \langle 0, 1, 1\rangle$, *y* $\vec{c} = \langle 1, 0, 1\rangle$

$$Volumen = \vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 2$$

En el siguiente ejemplo se muestra el origen del producto cruz, el ejemplo es muy sencillo pero esencial [4].

Ejemplo 22. *Dado dos vectores cualesquiera diferentes y no iguales al vector cero:*

$$\vec{A} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$$

y el vector

$$\vec{B} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$$

hallar otro vector cualquiera

$$\vec{X} = x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath} + x_3\vec{k} \tag{4.10}$$

tal que

$$\vec{A}\bullet\vec{X} = 0 \quad y \quad \vec{B}\bullet\vec{X} = 0$$

Solución: Tenemos por lo tanto que:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \quad \text{y para el otro vector} \quad b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

Despejando de las ecuaciones anteriores a x_1 y a x_2 en función de x_3 tendríamos lo siguiente:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_3x_3 & a_2 \\ -b_3x_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}x_3, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -a_3x_3 \\ b_1 & -b_3x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}x_3$$

Si se busca un vector cualquiera entonces podemos tomar a $x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ lo que nos lleva al vector:

$$\vec{X} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{\imath} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{X} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{\imath} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{\jmath} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

que corresponde a la misma ecuación 4.1; si se tienen dos vectores que pertenecen al plano XOY el producto cruz entre ellos da como resultado un vector que será paralelo al eje z.

4.2 PROBLEMAS

Problema 4.2.1. *Demostrar que el producto cruz del vector $\langle m, 0, 0\rangle$ y el vector $\langle 0, p, q\rangle$ da como resultado un vector del tipo $\langle 0, r, s\rangle$, determinar los valores de r, s.*

Problema 4.2.2. *Demostrar las propiedades (4.1.3) del producto cruz del 1 hasta el 4*

Problema 4.2.3. *Hallar el vector unitario perpendicular a los dos vectores*

$$2\overrightarrow{\imath} + 10\overrightarrow{\jmath} \quad y \quad 2\overrightarrow{\imath} - 3\overrightarrow{\jmath}.$$

Problema 4.2.4. *Hallar el área del triángulo cuyos vértices en el espacio son:* $A(2, 4, -5)$*,* $B(1, 3, 5)$ *y* $C(-1, 3, -2)$*.*

Problema 4.2.5. *Calcular el producto triple escalar de los siguientes vectores:*

1. $\overrightarrow{A} = \langle 2, -3, 5\rangle, \quad \overrightarrow{B} = \langle -2, -1, 0\rangle \quad y \quad \overrightarrow{C} = \langle 3, 5, 1\rangle$
2. $\overrightarrow{A} = \langle 1, -1, 1\rangle, \quad \overrightarrow{B} = \langle -3, 1, 0\rangle \quad y \quad \overrightarrow{C} = \langle 2, 1, 1\rangle$
3. $\overrightarrow{A} = \langle 3, -3, -5\rangle, \quad \overrightarrow{B} = \langle 2, 0, 0\rangle \quad y \quad \overrightarrow{C} = \langle 1, 1, 1\rangle$

Problema 4.2.6. *Dados los puntos* $P(1, 2, 1)$*,* $Q(3, 7, 5)$ *y* $R(2, 1, 1)$ *que yacen en un mismo plano, hallar el vector normal a dicho plano.*

4.3 LA LÍNEA RECTA EN EL ESPACIO

Se define la línea recta como un conjunto de puntos que mantienen una misma dirección. La línea recta en el espacio requiere de una dirección determinada y un punto fijo por donde pasar, si $\overrightarrow{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ es un vector que nos da la dirección, y P_0 un punto en el espacio que pertenece a la recta, entonces tenemos una recta completamente definida, veamos la figura 4.3

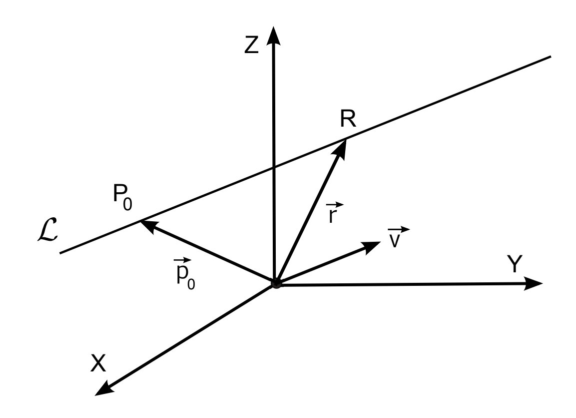


Figura 4.3 Línea recta

La línea recta $\mathcal{L}$ seguirá la dirección del vector $\overrightarrow{v}$, el punto R se representa por el vector $\overrightarrow{r}$ que definirá un punto móvil (x, y, z); el punto fijo será P_0 y se representa por $\overrightarrow{p_0} =$

$\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, el vector $\overrightarrow{P_0R}$ será un múltiplo del vector $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ luego tenemos la ecuación:

$$\vec{r} - \vec{p_0} = t\vec{v} \tag{4.11}$$

El escalar t será un parámetro que nos cambiará de posición, sobre la recta, del punto R. Podemos escribir la ecuación paramétrica según las coordenadas:

$$x - x_0 = tv_1 \tag{4.12}$$

$$y - y_0 = tv_2 \tag{4.13}$$

$$z - z_0 = tv_3 \tag{4.14}$$

La ecuación simétrica de una recta en el espacio se deduce de las anteriores despejando el parámetro t.

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} = t \tag{4.15}$$

Si la componente $v_1 = 0$ se tendría un vector dirección $\vec{v} = \langle 0, v_2, v_3 \rangle$, de manera similar se pueden presentar casos en donde $v_2 = 0$, o $v_3 = 0$ pero no todos a la vez porque no habría dirección; una dirección como $\vec{v} = \langle v_1, v_2, 0 \rangle$ nos muestra una línea recta paralela al plano XY, en la dirección del vector; si la dirección es $\vec{v} = \langle 0, v_2, 0 \rangle$ nos daría una dirección perpendicular al plano XY.

Si en el espacio tenemos dos puntos (x_0, y_0, z_0) y el punto (x_1, y_1, z_1) entonces se puede escribir la ecuación simétrica de una recta como:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \tag{4.16}$$

4.3.1 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Dado un punto cualquiera en el espacio P_0, de coordenadas (x_0, y_0, z_0) tal que no pertenezca a una recta $\mathcal{L}$ en 3D, deseamos buscar la distancia más corta entre el punto y la recta. Observemos la figura 4.4, escogemos un punto cualquiera que pertenezca a la recta como P_1 con coordenadas (x_1, y_1, z_1).

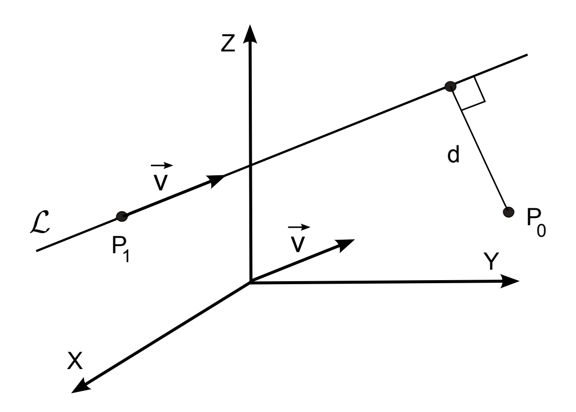


Figura 4.4 Distancia entre punto y recta

El vector dirección de la recta es $\vec{V} = \langle a, b, c \rangle$, tal que $a \neq 0$, $b \neq 0$, y $c \neq 0$, la ecuación de esta recta es:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = t$$

Si se aplica la ecuación 4.4 y detallando la figura 4.5

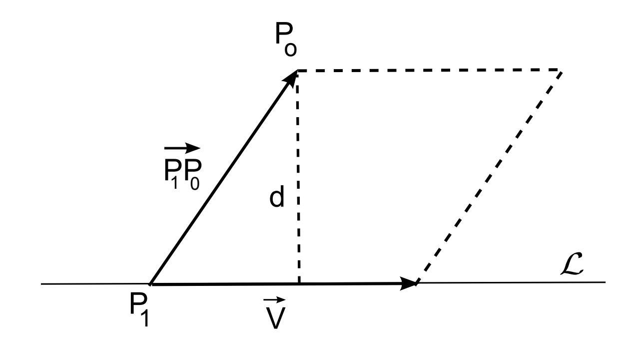


Figura 4.5 Altura y área del paralelogramo

Se llega a la ecuación de la distancia:

$$d = \frac{|\vec{V} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{V}|} \quad (4.17)$$

4.4 PROBLEMAS

Problema 4.4.1. *Demostrar que los puntos* $(6, 4)$, $(-3, 5)$ *y* $(24, 2)$ *son colineales.*

Problema 4.4.2. *Encontrar la recta que pasa por el punto* $(1, 2, -3)$ *y es paralela al vector* $2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 5\vec{k}$

Problema 4.4.3. *Dadas dos rectas, definidas por los puntos* $P_1(1, 0, 0)$ *y* $P_2(0, 2, 0)$,*y la recta definida por* $Q_1(1, 1, 3)$ *y* $Q_2(0, 0, 1)$*, hallar la distancia entre ellas.*

Problema 4.4.4. *Hallar la distancia de la recta que pasa por los puntos* $(1, 3, -2)$ *y* $(3, 2, 1)$*, al origen.*

Problema 4.4.5. *Hallar la ecuación de las tres medianas de un triángulo cuyos vértices son los puntos* $(a, 0, 0)$*,* $(0, b, 0)$ *y* $(0, 0, c)$*.*

4.5 EL PLANO EN EL ESPACIO

Cuando tenemos un punto en el espacio P_0 y se tiene una dirección definida por el vector $\vec{n}$, se puede hallar un único plano que pase por este punto y que sea perpendicular al vector $\vec{n}$, ver la figura 4.6.

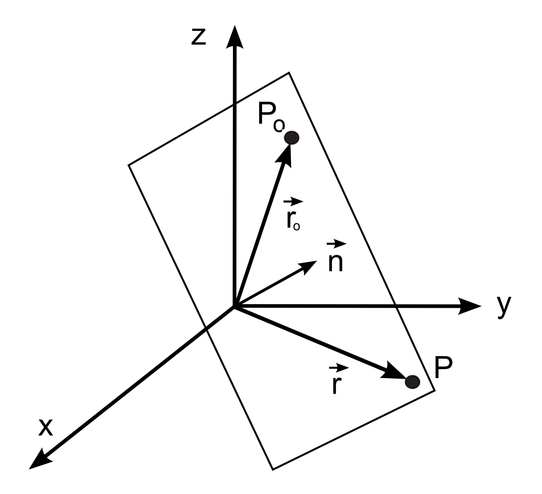


Figura 4.6 Plano en 3D

Ahora supongamos que tenemos dos puntos en el plano, el puntoP_0 definido por $\vec{r_0}$, y el punto P representado por el vector $\vec{r}$, si el punto P_0 tiene coordenadas (x_0, y_0, z_0) y el punto P dado por el vector $\vec{r} = \langle x, y.z\rangle$, entonces el vector $\vec{n}$ es perpendicular al vector $\vec{r} - \vec{r_0}$; tal condición se expresa por la ecuación:

$$\vec{n} \bullet (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0 \tag{4.18}$$

Supongamos que el vector normal al plano es $\vec{n} = \langle a, b, c\rangle$, obtenemos entonces la ecuación que define un plano en el espacio será el desarrollo de la ecuación 4.18:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{4.19}$$

Pero también se escribe de la forma llamada ecuación estándar del plano:

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{4.20}$$

Ejemplo 23. *Buscar la ecuación del plano determinado por tres puntos no colineales.*

Sean los tres puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y $P_3(x_3, y_3, z_3)$; el vector perpendicular al plano que contiene los tres puntos puede ser P_1P_2 y P_1P_3, se llega a:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{k} = \vec{n}$$

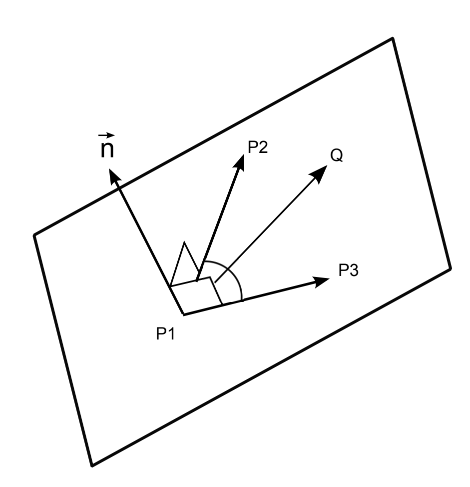


Figura 4.7 Ejemplo 23

Si los tres puntos me definen un plano y si se tiene un punto cualquiera $Q(x, y, z)$, perteneciente al mismo plano mencionado, entonces: $\overrightarrow{P_1Q}$ será perpendicular al vector $\vec{n}$, este producto punto será igual a 0

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

4.6 PROBLEMAS

Problema 4.6.1. *Encontrar la recta que pasa por el baricentro del triángulo ABC cuyos vértices son $A(4, 2, -3)$, $B(3, 2, 3)$ y $C(5, 2, 1)$.*

Problema 4.6.2. *Dado el plano ABC como se define en la gráfica 4.8, se pide hallar la distancia del origen $(0, 0, 0)$ hasta el punto P, tal que esta distancia sea un mínimo.*

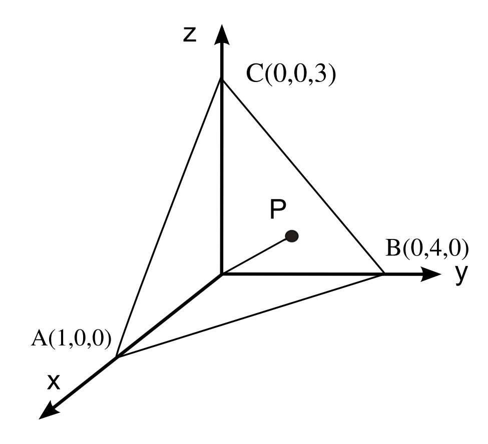


Figura 4.8 Problema 4.6.2

Problema 4.6.3. *Dibujar de manera esquemática y resolver los siguientes ejercicios:*

a) *Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto* $(3,-1,4)$ *cuyo vector normal es* $\overrightarrow{M} = 2\overrightarrow{\imath} + 5\overrightarrow{\jmath} - 3\overrightarrow{k}$

b) *Hallar el plano que contiene los puntos* $(3,2,-3)$, $(5,-1,2)$ *y* $(7,4,-1)$

c) *Si un plano tiene las intersecciones con los ejes así:* $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ *y* $(0,0,c)$ *muestre que su ecuación es:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

siempre y cuando $a, b, c \neq 0$

Capítulo 5

TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE EJES

5.0.1 TRASLACIÓN

Si tenemos un sistema cartesiano XOY como el representado por la figura 5.1 y si sobre este mismo plano cartesiano colocamos un nuevo origen (h, k) para otro sistema cartesiano tal que los nuevos ejes UOV sean paralelos a los ejes del sistema XOY entonces una función o una relación f definida por la ecuación $f(x, y) = k1$ se puede representar en el nuevo sistema generando una nueva ecuación $g(u, v) = k2$ que eventualmente podría simplificar operaciones matemáticas posteriores.

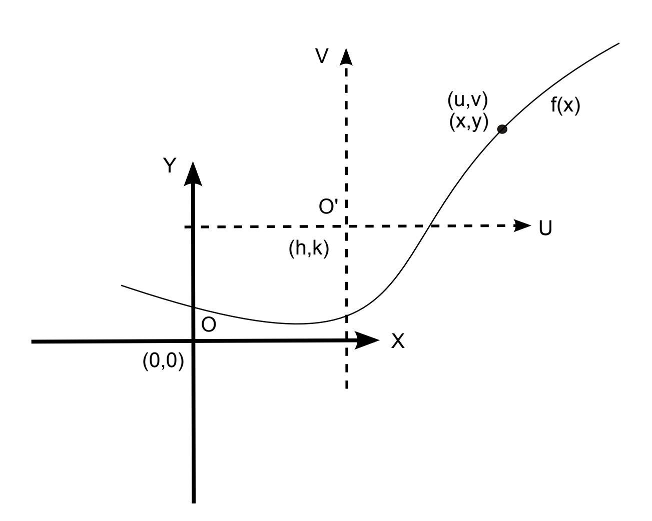


Figura 5.1 Traslación de coordenadas

Si utilizamos vectores en la figura anterior se tiene que $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}$ nos ubica un punto cualquiera en el plano XOY, $\overrightarrow{r'} = u\overrightarrow{\imath} + v\overrightarrow{\jmath}$ será la posición del mismo punto pero visto desde el nuevo origen; y la posición del nuevo origen vista desde el origen principal o

XOY será $\overrightarrow{OO'} = h\vec{\imath} + k\vec{\jmath}$, ver figura 5.2.

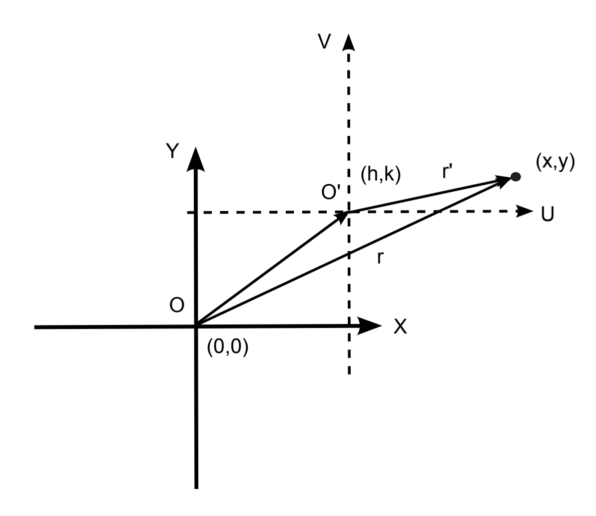


Figura 5.2 Traslación de coordenadas con vectores

$$(h\vec{\imath} + k\vec{\jmath}) + (u\vec{\imath} + v\vec{\jmath}) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = (h + u)\vec{\imath} + (k + v)\vec{\jmath} \quad (5.1)$$

De donde se llega a:

$$x = h + u \qquad \text{y también} \qquad y = k + v \quad (5.2)$$

Ejemplo 24. *Hacer un bosquejo de la siguiente función dada por la ecuación:*

$$x^2 + 1/2\, y^2 - 4\, y + 7 = 0$$

Procedemos a completar cuadrados en la ecuación $x^2 + 1/2\, y^2 - 4\, y + 7 = 0$ para llegar a

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 4y + 7 &= 0 \\
x^2 + \frac{1}{2}(y^2 - 8y) + 7 &= 0 \\
x^2 + \frac{1}{2}(y^2 - 8y + 16 - 16) + 7 &= 0 \\
x^2 + \frac{1}{2}[(y-4)^2 - 16] + 7 &= 0 \\
x^2 + \frac{1}{2}(y-4)^2 - 8 + 7 &= 0 \\
x^2 + \frac{1}{2}(y-4)^2 &= 1
\end{aligned}$$

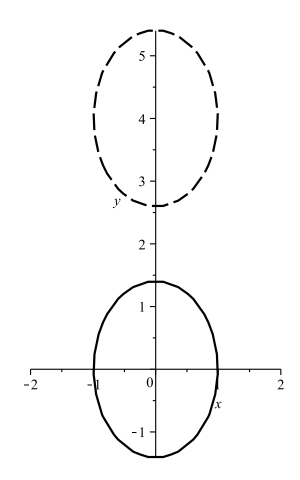


Figura 5.3 Traslación de una cónica

En la figura 5.3 observamos una elipse que se encuentra desplazada de su centro (línea segmentada) y la misma elipse centrada (línea continua) al realizar su desplazamiento equivalente a 4 unidades. Realizando el desplazamiento la ecuación se transforma en:

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

5.0.2 ROTACIÓN

En algunos problemas de simplificación y graficación, por ejemplo sobre cónicas, es necesario eliminar el término "xy"; esto se realiza con una rotación que nos lleva a la rápida identificación del tipo de cónica.

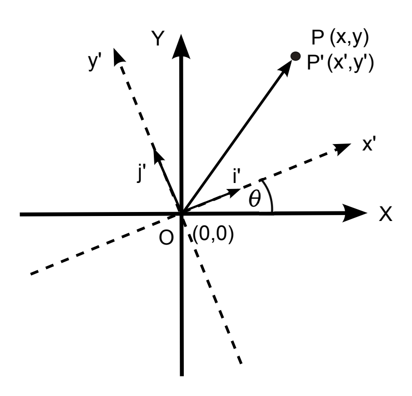


Figura 5.4 Rotación de coordenadas con vectores

En la figura 5.4 tenemos el punto P identificado por el vector $r = \vec{\imath}x + \vec{\jmath}y$, este vector también se puede representar por el sistema de coordenadas rotadas $x'y'$ que sería

$r' = \overrightarrow{\imath'} x' + \overrightarrow{\jmath'} y'$, pero se tiene además que $\overrightarrow{\imath'} = \cos(\theta)\overrightarrow{\imath} + \operatorname{sen}(\theta)\overrightarrow{\jmath}$, para el eje x'; y para el eje y' se consigue que: $\overrightarrow{\jmath'} = \cos(\theta + \pi/2)\overrightarrow{\imath} + \operatorname{sen}(\theta + \pi/2)\overrightarrow{\jmath} = -\operatorname{sen}(\theta)\overrightarrow{\imath} + \cos(\theta)\overrightarrow{\jmath}$ Ahora si se igualan las ecuaciones que corresponden a $r' = r$ se obtiene el sistema siguiente:

$$x = x'\cos(\theta) - y'\operatorname{sen}(\theta) \tag{5.3}$$
$$y = x'\operatorname{sen}(\theta) + y'\cos(\theta) \tag{5.4}$$

Si un lugar geométrico en un sistema de coordenadas xy tiene sus puntos en (x, y) entonces se denota por $(x\cos(\theta) + y\operatorname{sen}(\theta), x\operatorname{sen}(\theta) + y\cos(\theta))$ sobre el sistema rotado $x'y'$ de la misma manera si un lugar geométrico se define en otro sistema $x'y'$ entonces sus puntos quedarían en el sistema no rotado como $(x\cos(\theta) - y\operatorname{sen}(\theta), x\operatorname{sen}(\theta) + y\cos(\theta))$, para el proceso inverso tenemos que:

$$x' = x\cos(\theta) + y\operatorname{sen}(\theta) \tag{5.5}$$
$$y' = -x\operatorname{sen}(\theta) + y\cos(\theta) \tag{5.6}$$

En el estudio de las cónicas se aplica la ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{5.7}$$

Pero si tenemos una forma más general, en donde las cónicas no aparecen de la manera canónica sino rotadas entonces aplicamos la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{5.8}$$

el término xy se puede eliminar realizando una rotación cierto ángulo dado por la expresión:

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} \tag{5.9}$$

Si en la ecuación anterior se tiene que $A = B$ es preferible emplearla de la forma siguiente:

$$\cot(2\theta) = \frac{A - C}{B} \tag{5.10}$$

Ejemplo 25. *Demuestre que la siguiente ecuación $xy = 1$ es una hipérbola.*

Observando la ecuación 5.8 tenemos que $A = 0,\ B = 1$ y $C = 0$, para eliminar el término xy aplicamos la fórmula 5.10 tal que:

$$\cot(2\theta) = \frac{A - C}{B} = 0$$

entonces tenemos que $2\theta = \pi/2$ para obtener $\theta = \pi/4$, si aplicamos la fórmula de transformación 5.3 y con $\cos(\theta) = \operatorname{sen}(\theta) = 1/\sqrt{2}$, llegamos a:

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

Realizando la sustitución de las transformaciones anteriores en la ecuación original, obtenemos:

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

Llegando a la expresión canónica de una hipérbola así:

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1 \tag{5.11}$$

Veamos la figura 5.5 en donde se observan las dos hipérbolas, antes (punteada) y después (continua) de la rotación

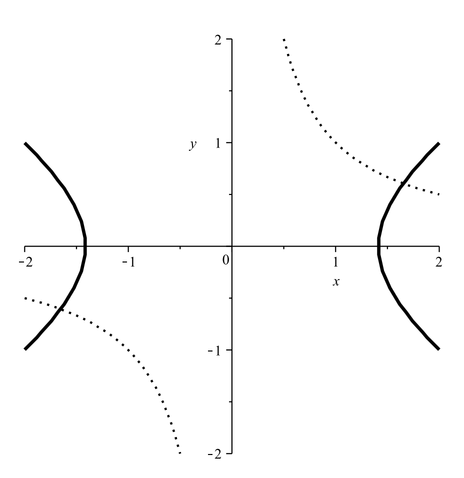


Figura 5.5 Rotación de hipérbola

En la ecuación 5.9 se tiene un ángulo doble 2θ, si necesitamos el ángulo sencillo entonces podemos utilizar las siguientes identidades para hallar el ángulo sencillo a partir del ángulo doble:

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}} \quad (5.12)$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}} \quad (5.13)$$

Los signos de las ecuaciones anteriores dependen del cuadrante.

5.0.3 CLASIFICACIÓN DE CÓNICAS

Las curvas generales de segundo grado nos definen cónicas, pero no son de fácil clasificación. Los coeficientes de la ecuación general 5.8 sirven para clasificar el tipo de cónicas que estamos tratando, ya sean parábolas, elipses, hipérbolas, exceptuando casos degenerados, entonces tenemos la siguiente tabla:

Cuadro 5.1 Clasificación de cónicas

Elipse o Círculo	$B^2 - 4AC < 0$
Parábola	$B^2 - 4AC = 0$
Hipérbola	$B^2 - 4AC > 0$

Supongamos que tenemos la ecuación $2x^2 - 4xy + 3y^2 + 5x + 6y - 8 = 0$ cuyos coeficientes son $A = 2$, $B = -4$, $C = 3$, y si aplicamos las expresiones de la tabla 5.1 tenemos que:

$$B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4(2)(3) = -8 < 0$$

de donde se concluye que es una elipse.

5.1 PROBLEMAS

Problema 5.1.1. *Dada la parábola $y = 3x^2 + 8x - 3$ trasladarla de tal forma que su vértice pase por el punto $(0, 0)$.*

Problema 5.1.2. *De las ecuaciones 5.3 y 5.4, despejar los términos x' y y'.*

Problema 5.1.3. *Hallar las coordenadas del punto $(3, 4)$ cuando rotamos los ejes $\pi/6$ radianes.*

Problema 5.1.4. *Dada la ecuación de la recta $2x + 3y = 1$ escribir la nueva ecuación si rotamos los ejes $\pi/4$ radianes.*

Problema 5.1.5. *Buscar las coordenadas de los focos de la elipse:*

$$6x^2 + xy + 7y^2 - 36 = 0$$

Problema 5.1.6. *Realizar discusión entre estudiantes sobre el siguiente problema: dada la recta* $-3x + 5y = 6$ *y si se tiene el punto* $(1, 3)$, *deseamos trasladar la recta de forma tal que pase por el mencionado punto. ¿ Cuál es la nueva ecuación de la recta?*

Problema 5.1.7. *Dada la ecuación* $x^2 + xy + ky^2 + 4y + 8 = 0$ *¿Qué valor debe tener* k *para que la ecuación corresponda a una elipse?*

Problema 5.1.8. *Demuestre que la ecuación* $x^2 + y^2 = 9$ *es invariante (no se modifica) ante una rotación de ejes.*

Problema 5.1.9. *Hacer rotación de ejes de tal forma que elimine el término* xy *de las siguientes ecuaciones:*

1. $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 90x - 130y = 0$
2. $x^2 - 6x + y + 5 = 0$
3. $41x^2 - 24xy + 34y^2 - 25 = 0$
4. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 49=0$
5. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 49=0$

Problema 5.1.10. *Clasificar las siguientes cónicas:*

1. $36x^2 - 60xy + 25y^2 + 9y = 0$
2. $x^2 - 6x + y + 5 = 0$
3. $x^2 + xy + 4y^2 + x + y - 4 = 0$
4. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 49=0$
5. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 49=0$

CONCLUSIONES

Existen varias modalidades pedagógicas para presentar los conceptos geométricos a los estudiantes de primer año de licenciatura: uno es la geometría tradicional sintética, otro es la geometría analítica y en este texto presentamos el enfoque vectorial pero con la característica de no coordenar o referenciar los vectores. El empleo de las coordenadas es muy útil para la manipulación algebraica mientras que el uso sintético es de naturaleza conceptual obligando al estudiante a pensar sin las ayudas cartesianas. La dos dimensiones empleadas como base de estudio en el texto son importantes para saltar a las 3 dimensiones pero son más difíciles de manejar. Aunque hay una gran variedad de textos sobre vectores, éstos son de naturaleza coordenada y básicamente son del tipo algebraico. La geometría vectorial es una herramienta poderosa para resolver problemas de ingeniería y los fenómenos físicos son independientes de las coordenadas de referencia; esta cualidad hace que la geometría vectorial sintética sea lo más adecuado para aplicar.
Se espera que el estudiante razone sobre objetos geométricos que sólo tienen propiedades intrínsecas o sea sin coordenadas; ésto hace que sean más intuitivos y no se enreden con más ecuaciones innecesarias al plantear y resolver problemas.

Bibliografía

[1] Gibbs, Willard. (1974). Vector Analysis. Yale University Press, USA, 9a edición.

[2] Bruño, M. (1971) Geometría, Curso Superior. Editorial Bedout, Medellin, 17a edición.

[3] Landaverde, F. J. Curso de Geometría. Editorial Andes, Bogotá.

[4] Wexler, Charles. (1964). Analytic Geometry, A vector Approach.

[5] Chaves Agudelo, Armando. (1987). Geometría Vectorial, Centro de Publicaciones Universidad Nacional.

[6] Apostol, Tom M. (1988). Calculo, Volumen I, segunda edición,editorial Reverté.

[7] Hilbert, David. (1950). The Foundation of Geometry, Reprint Edition.

[8] Sharipov, R. A. (2004). Quick Introduction to Tensor Analusis, r-sharipov@mail.ru.

[9] De Greiff, Luis. (1963). Calculo Vectorial, Anales de la Facultad Nacional de Minas, Medellin.

[10] Stewart, James. (2009). Calculus , 7 edición, Thomson.

[11] Isaacs, Martin. (2001). Geometría Universitaria, ISBN 970-686-137-8 , 7 edición, Thomson&Learning.

[12] Lehmann, Charles H. (1989). Geometría Analítica, ISBN 968-18-1176-3, Limusa Editores

[13] Rees, Paul. (1970). Geometria Analítica, Editorial Reverte Mexicana, S.A., Segunda edición

[14] Efimov, N.(1969). Curso Breve de Geometría Analítica, Editorial MIR, Segunda Edición.

[15] Kletenik,D, Problems in Analytical Geometry, ISBN:0-89875-714-2, Reprinted form 1968 edition,University Press Pacific. Honolulu, Hawaii